Tips 2.32, 2.33, 2.34

Kedjeregeln $\begin{cases} z'_x = z'_u u'_x + z'_v v'_x \\ z'_y = z'_u u'_y + z'_v v'_y \end{cases}$ uppfylls för alla funktioner z

Vi kan ersätta z med en tom parentes: $\begin{cases} (\ )'_x = (\ )'_u u'_x + (\ )'_v v'_x \\ (\ )'_y = (\ )'_u u'_y + (\ )'_v v'_y \end{cases}$

I parentesen kan vi sätta in vad vi vill: z, z'_x, z'_y etc

I alla uppgifter här har vi C^2-funktioner, dvs $z''_{xy} = z''_{yx}$ eller $z''_{uv} = z''_{vu}$

Om man får uttryck som $(x z'_v)'_x$ måste produktregeln användas:

$$(x z'_v)'_x = 1 \cdot z'_v + x \cdot (z'_v)'_x$$

En differentialekvation av ordning 2 kommer innehålla 2 godtyckliga funktioner i svaret. Ett bivillkor reducerar till en godt. funktion. Två bivillkor leder till entydig lösning (ingen godt. funktion kvar).

I dessa uppgifter får ni ett variabelbyte givet. Att hitta bra variabelbyten är knepigare men det finns metoder för det (ligger utanför denna kurs)

Lösningar 2.32, 2.33, 2.34 (2.32a-c)

2.32) $z''_{xx} - 4z''_{xy} + 4z''_{yy} = 6y$

a) Variabelbyte $\begin{cases} u = 2x+y \\ v = x \end{cases}$ Kedjeregeln $\begin{cases} z'_x = z'_u u'_x + z'_v v'_x = 2z'_u + z'_v \\ z'_y = z'_u u'_y + z'_v v'_y = z'_u \end{cases}$

Användbart skriva $\begin{cases} (\ )'_x = 2(\ )'_u + (\ )'_v \\ (\ )'_y = (\ )'_u \end{cases}$ (*)

sätt in z'_u och z'_v i (*)

$$z''_{xx} = (z'_x)'_x = (2z'_u + z'_v)'_x = 2(z'_u)'_x + (z'_v)'_x \overset{\downarrow}{=} 2\left[2(z'_u)'_u + (z'_u)'_v\right] +$$
$$+\ 2(z'_v)'_u + (z'_v)'_v = 4z''_{uu} + 4z''_{uv} + z''_{vv}$$
$$z''_{xy} = (z'_x)'_y = (2z'_u + z'_v)'_y = 2(z'_u)'_y + (z'_v)'_y \overset{(*)}{=} 2(z'_u)'_u + (z'_v)'_u = 2z''_{uu} + z''_{uv}$$
$$z''_{yy} = (z'_y)'_y = (z'_u)'_y \overset{(*)}{=} (z'_u)'_u = z''_{uu}$$

Sätt in i diff-ekvationen (och $6y = 6(u-2x) = 6(u-2v)$) $\Rightarrow$

$$\underline{4z''_{uu}} + \underline{\underline{4z''_{uv}}} + z''_{vv} - 4(\underline{2z''_{uu}} + \underline{\underline{z''_{uv}}}) + \underline{4z''_{uu}} = 6u - 12v \iff$$

$z''_{vv} = 6u - 12v$ ny enklare diff-ekv., primitiv på z 2 gånger $\Rightarrow$

$z'_v = 6uv - 6v^2 + f(u) \Rightarrow z = 3uv^2 - 2v^3 + vf(u) + g(u) \Rightarrow$

$$\underline{z(x,y)} = 3(2x+y)x^2 - 2x^3 + xf(2x+y) + g(x+2y) = \underline{4x^3 + 3yx^2 + xf(2x+y) + g(2x+y)}$$

f, g godtyckliga

b) Första bivillkor $z(0,y) = e^{-y^2} \Rightarrow$ /sätt in $x=0$/

$z(0,y) = 0 + 0 + 0f(y) + g(y) = e^{-y^2} \Rightarrow g(y) = e^{-y^2} \Rightarrow g(2x+y) = e^{-(2x+y)^2} \Rightarrow$

$z(x,y) = 4x^3 + 3yx^2 + xf(2x+y) + e^{-(2x+y)^2}$ (g bestämd)

c) Andra bivillkor $z'_x(0,y) = 0$. b) $\Rightarrow z'_x = 12x^2 + 6yx + \underbrace{1 \cdot f(2x+y) + x \cdot 2f'(2x+y)}_{\text{från produktregel}} +$ (inre derivata)

$-4(2x+y)e^{-(2x+y)^2} \underset{(x=0)}{\Rightarrow} z'_x(0,y) = 0 + 0 + f(y) + 0f'(y) - 4ye^{-y^2} = 0 \Rightarrow$

$f(y) = 4ye^{-y^2} \Rightarrow f(2x+y) = 4 \cdot (2x+y)e^{-(2x+y)^2} \Rightarrow$ (nu också f bestämd)

$$\underline{z(x,y) = 4x^3 + 3yx^2 + 4x(2x+y)e^{-(2x+y)^2} + e^{-(2x+y)^2}}$$

2.33 Variabelbyte $\begin{cases} u = x+y \\ v = xy \end{cases}$ Transformera $\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = z''_{yx}$ till u, v

Kedjeregeln $\begin{cases} z'_x = z'_u u'_x + z'_v v'_x = z'_u + y z'_v \\ z'_y = z'_u u'_y + z'_v v'_y = z'_u + x z'_v \end{cases}$ så $\begin{cases} (\ )'_x = (\ )'_u + y(\ )'_v \\ (\ )'_y = (\ )'_u + x(\ )'_v \end{cases}$ (*)

$$\Rightarrow z''_{yx} = (z'_y)'_x = (\underbrace{z'_u + x z'_v}_{\text{produktregel}})'_x = (\underbrace{z'_u}_{z'_u \text{ i } (*)})'_x + 1 \cdot z'_v + x \cdot (\underbrace{z'_v}_{z'_v \text{ i } (*)})'_x =$$

$$= (z'_u)'_u + y(z'_u)'_v + z'_v + x[(z'_v)'_u + y(z'_v)'_v] = z''_{uu} + y z''_{uv} + z'_v + x z''_{uv} + xy z''_{vv} =$$

$$= z'_v + z''_{uu} + \underbrace{(x+y)}_{u} z''_{uv} + \underbrace{xy}_{v} z''_{vv} = \underline{z'_v + z''_{uu} + u z''_{uv} + v z''_{vv}}$$

2.34 Lös $x z''_{xx} - y z''_{xy} + z'_x = x$ $(x>0, y>0)$ med hjälp av nya variabler

$\begin{cases} u = 2xy \\ v = 1/y \end{cases}$ Kedjeregeln $\begin{cases} z'_x = z'_u u'_x + z'_v v'_x = 2y z'_u \\ z'_y = z'_u u'_y + z'_v v'_y = 2x z'_u - \frac{1}{y^2} z'_v \end{cases}$ $\begin{cases} (\ )'_x = 2y(\ )'_u \\ (\ )'_y = 2x(\ )'_u - \frac{1}{y^2}(\ )'_v \end{cases}$ (*)

$$\Rightarrow z''_{xx} = (z'_x)'_x = (\underbrace{2y}_{\substack{\text{konstant vid} \\ x\text{-derivering}}} z'_u)'_x = 2y(\underbrace{z'_u}_{z'_u \text{ i } (*)})'_x = 2y \cdot 2y (z'_u)'_u = 4y^2 z''_{uu}$$

$$z''_{xy} = z''_{yx} = (z'_y)'_x = (\underbrace{2x z'_u}_{\text{produkt}} - \underbrace{\tfrac{1}{y^2}}_{\text{konstant}} z'_v)'_x = 2z'_u + 2x(\underbrace{z'_u}_{z'_u \text{ i } (*)})'_x - \frac{1}{y^2}(\underbrace{z'_v}_{z'_v \text{ i } (*)})'_x =$$

$$= 2z'_u + 2x \cdot 2y (z'_u)'_u - \frac{1}{y^2} \cdot 2y (z'_v)'_u = 2z'_u + 4xy z''_{uu} - \frac{2}{y} z''_{uv}$$

In i diffekv $\Rightarrow$

$$x \cdot \underline{4y^2 z''_{uu}} - y(\underline{\underline{2z'_u}} + \underline{4xy z''_{uu}} - \tfrac{2}{y} z''_{uv}) + \underline{\underline{2y z'_u}} = x \Rightarrow 2z''_{uv} = x$$

$x = \frac{u}{2y} = \frac{uv}{2}$ $\Rightarrow$ ny diffekv $2z''_{uv} = \frac{uv}{2}$ $\Leftrightarrow$ $\underline{z''_{uv} = \frac{uv}{4}}$

v-primitiv $\Rightarrow$ $z'_u = \frac{uv^2}{8} + f(u)$ $\overset{u\text{-prim.}}{\Rightarrow}$ $z = \frac{u^2 v^2}{16} + F(u) + g(v)$ $\Rightarrow$
$(F' = f)$

$uv = 2x \Rightarrow u^2 v^2 = 4x^2$ $\Rightarrow$ $\underline{z(x,y) = \frac{x^2}{4} + F(2xy) + g(\tfrac{1}{y})}$ F, g godtyckliga

Om man sätter $\begin{cases} \tilde{F}(t) = F(2t) \\ \tilde{g}(t) = g(\frac{1}{t}) \end{cases}$ kan lösn skrivas $\underline{z(x,y) = \frac{x^2}{4} + \tilde{F}(xy) + \tilde{g}(y)}$
$\tilde{F}, \tilde{g}$ godtyckliga