2.55, 2.56, 2.58

Riktningsderivatan av $f(x,y)$ i punkten (a,b) och riktning $\bar{v} = (v_1, v_2)$, där $|\bar{v}| = \sqrt{v_1^2 + v_2^2} = 1$, beräknas som $f'_{\bar{v}}(a,b) = \nabla f(a,b) \bullet \bar{v} = f'_x(a,b)v_1 + f'_y(a,b)v_2$.

Motsvarande gäller i 3D

2.55 $f(x,y) = \ln(x^2+2y^2) \Rightarrow \nabla f(x,y) = \left(\frac{2x}{x^2+2y^2}, \frac{4y}{x^2+2y^2}\right) \Rightarrow$

$\nabla f(2,1) = \left(\frac{4}{4+2}, \frac{4}{4+2}\right) = \left(\frac{2}{3}, \frac{2}{3}\right)$

a) $\bar{v} = \left(\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}\right)$ har redan $|\bar{v}| = 1 \Rightarrow f'_{\bar{v}}(2,1) = \nabla f(2,1) \bullet \bar{v} = \frac{2}{3} \cdot \frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{2}{3} \cdot \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{2\sqrt{2}}{3}$

b) Riktning $\bar{w} = (1,2)$ har inte längd 1, normera: $\bar{v} = \frac{\bar{w}}{|\bar{w}|} = \frac{\bar{w}}{\sqrt{1^2+2^2}} = \frac{1}{\sqrt{5}}\bar{w} = \left(\frac{1}{\sqrt{5}}, \frac{2}{\sqrt{5}}\right)$

$\Rightarrow f'_{\bar{v}}(2,1) = \nabla f(2,1) \bullet \left(\frac{1}{\sqrt{5}}, \frac{2}{\sqrt{5}}\right) = \frac{2}{3} \cdot \frac{1}{\sqrt{5}} + \frac{2}{3} \cdot \frac{2}{\sqrt{5}} = \frac{6}{3\sqrt{5}} = \frac{2}{\sqrt{5}}$

2.56 Från punkt $(3,2,1)$ i riktning mot origo ger att $\bar{v} = -\frac{(3,2,1)}{\sqrt{3^2+2^2+1^2}} =$

$= \left(\frac{-3}{\sqrt{14}}, \frac{-2}{\sqrt{14}}, \frac{-1}{\sqrt{14}}\right)$

$f(x,y,z) = xy^2z^3 \Rightarrow \nabla f(x,y,z) = (y^2z^3, 2xyz^3, 3xy^2z^2) \Rightarrow \nabla f(3,2,1) = (4, 12, 36) \Rightarrow$

$f'_{\bar{v}}(3,2,1) = (4,12,36) \bullet \left(\frac{-3}{\sqrt{14}}, \frac{-2}{\sqrt{14}}, \frac{-1}{\sqrt{14}}\right) = -\frac{1}{\sqrt{14}}(12+24+36) = -\frac{72}{\sqrt{14}} < 0 \Rightarrow$ f avtar i $\bar{v}$:s riktning

2.58 Temperatur på Svalbard $T(x,y) = 3\arctan(x^2+y) - 10 - \frac{6}{1+x^2+y^2}$

En isbjörn befinner sig i punkt $(1,-2)$ och vill förflytta sig i riktning med snabbast sjunkande temperatur $\Rightarrow$ i $-\nabla T(1,-2)$:s riktning

$\nabla T(x,y) = \left(\frac{3 \cdot 2x}{1+(x^2+y)^2} + \frac{6 \cdot 2x}{(1+x^2+y^2)^2}, \frac{3}{(1+x^2+y)^2} + \frac{6 \cdot 2y}{(1+x^2+y^2)^2}\right) \Rightarrow$

$\nabla T(1,-2) = \left(\frac{6}{2} + \frac{12}{6^2}, \frac{3}{2} - \frac{24}{6^2}\right) = \left(\frac{10}{3}, \frac{5}{6}\right) = \frac{1}{6}(20,5) \Rightarrow$

isbjörnen bör gå i riktning $-(20,5)$. Normerat $\bar{v} = -\frac{(20,5)}{\sqrt{20^2+5^2}} = -\frac{(4,1)}{\sqrt{17}}$

$\Rightarrow T'_{\bar{v}}(1,-2) = -|\nabla T| = -\sqrt{425} \cdot \frac{1}{6} = -\sqrt{17} \cdot \frac{5}{6}$ [°C/km]

Om björnen går med $3\ m/s = 3 \cdot 10^{-3}\ km/s$ sjunker temperaturen med

$\sqrt{17} \cdot \frac{5}{6} \cdot 3 \cdot 10^{-3} = \frac{5\sqrt{17}}{2000}$ [°C/s] eller $\frac{5\sqrt{17}}{2000} \cdot 60$ °C/min.