2.44, 2.46, 2.48

2.44 Nivåkurva $f(x,y) = x^3+xy+y^3=5$ [Testa "plot $x^3+xy+y^3=5$" i Wolfram Alpha]

$f(2,-1) = 8-2-1=5 \Rightarrow (2,-1)$ är på kurvan

Bestäm tangentlinje och normallinje i $(2,-1)$ till kurvan

$\nabla f(x,y) = (3x^2+y,\ x+3y^2) \Rightarrow \nabla f(2,-1) = (11,5) = \bar{N}$ är normalvektor

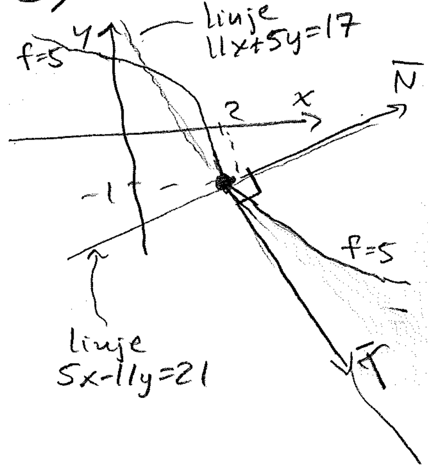
$\bar{T} = (5,-11)$ är tangentvektor (ty $\bar{N}\cdot\bar{T} = 11\cdot 5 - 5\cdot 11 = 0$)

(x,y) på tangentlinje $\Leftrightarrow \bar{N}\cdot\underbrace{(x-2,y-(-1))}_{\text{parallell med } \bar{T}}=0$

$\Rightarrow 11(x-2)+5(y+1)=0 \Rightarrow 11x+5y=17$

(x,y) på normallinje $\Leftrightarrow \bar{T}\cdot\underbrace{(x-2,y-(-1))}_{\text{parallell med } \bar{N}}=0$

$\Rightarrow 5(x-2)-11(y+1)=0 \Rightarrow 5x-11y=21$



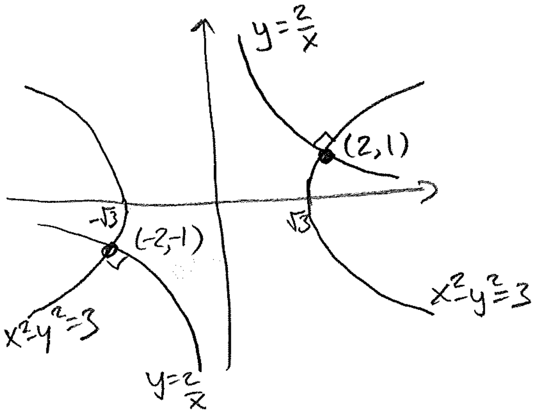
2.46 Skärning: $\begin{cases} x^2-y^2=3 \\ xy=2 \end{cases} \Rightarrow y=\frac{2}{x}$, ger $x^2-\left(\frac{2}{x}\right)^2=3 \Rightarrow x^2-\frac{4}{x^2}=3 \Rightarrow$

$x^4-3x^2-4=0 \Rightarrow x^2=\frac{3}{2}\pm\sqrt{\underbrace{\frac{9}{4}+4}_{\frac{25}{4}}}=\frac{3\pm5}{2}$

$\Rightarrow x^2=4,\ (x^2=-1)$

$\Rightarrow x=\pm2$ och $y=\frac{2}{x}=\pm1$

$\Rightarrow$ pkter $(2,1)$ och $(-2,-1)$



Vinkel mellan kurvor (tangentlinjer) = vinkel mellan normalvektorer = vinkel mellan gradienter

$f(x,y)=x^2-y^2 \Rightarrow \nabla f=(2x,-2y)$
$g(x,y)=xy \Rightarrow \nabla g=(y,x)$

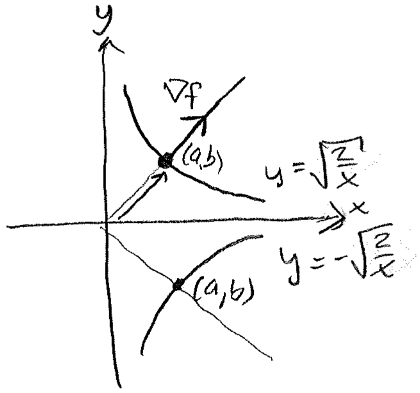
$\Rightarrow \nabla f\cdot\nabla g = 2x\cdot y-2y\cdot x = 0$ i alla punkter!

$\Rightarrow$ ortogonala (vinkelräta)

vinkel $=\frac{\pi}{2}$

2.48 $f(x,y) = xy^2 = 2$ (nivåkurva)

$(\Leftrightarrow y = \pm\sqrt{\frac{2}{x}})$



Sök punkter där normallinjen går genom origo

$\Rightarrow \nabla f(a,b)$ parallell med (a,b)

$\nabla f(x,y) = (y^2, 2xy) \Rightarrow \nabla f(a,b) = (b^2, 2ab)$

(a,b) & $(b^2, 2ab)$ parallella : $\begin{vmatrix} a & b^2 \\ b & 2ab \end{vmatrix} = 2a^2b - b^3 = b(2a^2-b^2) = 0$

$\Rightarrow b = 0$ (går ej med $ab^2=2$) eller $\underline{2a^2 = b^2}$

$\left.\begin{matrix} 2a^2 = b^2 \\ ab^2 = 2 \end{matrix}\right\} \Rightarrow 2a^3 = 2 \Rightarrow a^3 = 1 \Rightarrow a = 1 \Rightarrow b^2 = 2 \Rightarrow b = \pm\sqrt{2}$

$\Rightarrow$ punkter $\underline{(1, \pm\sqrt{2})}$

Alt Man kan också skriva normallinjen genom (a,b):

$\bar{N} = \nabla f(a,b) = (b^2, 2ab) \Rightarrow$ tangentvektor $\bar{T} = (2ab, -b^2)$ $(\bar{T}\cdot\bar{N} = 0)$

$\Rightarrow (x,y)$ på normallinje om $\bar{T}\cdot\underbrace{(x-a, y-b)}_{\text{parallell } \bar{N}} = 0 \Rightarrow$

$2ab(x-a) - b^2(y-b) = 0 \Rightarrow \underline{2abx - b^2y = 2a^2b - b^3}$ normallinjen

$(x,y) = (0,0)$ på normallinjen $\Rightarrow 0 - 0 = 2a^2b - b^3 \Rightarrow$

$b(2a^2 - b^2) = 0$ som ovan, leder på samma sätt som ovan till punkterna $(1, \pm\sqrt{2})$

Obs (a,b) & $(b^2, 2ab)$ parallella kan också fås med

$(b^2, 2ab) = k\cdot(a,b) \Rightarrow \begin{cases} b^2 = ka \ (1) \\ 2ab = kb \ (2) \end{cases}$ $(2) \Rightarrow \underbrace{b=0}_{\text{ej på kurvan}}$ eller $k = 2a$

$k = 2a$ i $(1) \Rightarrow b^2 = 2a\cdot a = 2a^2$ så $\underline{2a^2 = b^2}$ fås igen.