2.12c, 2.50, 2.54

först tips 2.12c, 2.50
sedan lösningen

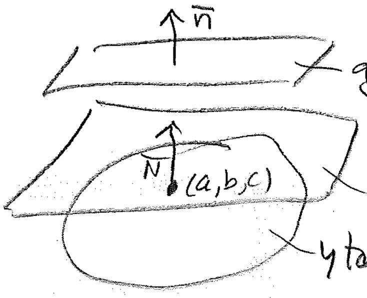
TIPS

2.12 c Vi har en funktion $y=f(x,z)$

Tangentplan i $(a, \underbrace{f(a,c)}_{b}, c)$ ges av $y=f(a,c)+f'_x(a,c)(x-a)+f'_z(a,c)(z-c)$

Alternativt. Bilda 3-var. funktion $g(x,y,z)=f(x,z)-y$ $\Rightarrow$ ytan är nivåytan $g(x,y,z)=0$ $\Rightarrow$ normal i (a,b,c) är $\bar{N}=\nabla g(a,b,c)$ och tangentplan fås av $\bar{N}\cdot(x-a,y-b,z-c)=0$.

2.50



givet plan $x-y+2z=0$, normal $\bar{n}=\begin{pmatrix}1\\-1\\2\end{pmatrix}$

tangentplan normal i (a,b,c): $\bar{N}=\nabla f(a,b,c)$

ytan $f(x,y,z)=1$

Söker punkter (a,b,c) på ytan (så $f(a,b,c)=1$) där $\bar{N}$ och $\bar{n}$ parallella

Hittas genom att sätta $\bar{N}=k\bar{n}$ eller $\bar{N}\times\bar{n}=\bar{0}$

Lösningar

2.12c) Yta $y = \arcsin(xz)$. Hitta tangentplan i $(a,b,c) = (1, \frac{\pi}{6}, \frac{1}{2})$

[$x=1, z=\frac{1}{2} \Rightarrow y = \arcsin\frac{1}{2} = \frac{\pi}{6}$ OK, punkten $(1, \frac{\pi}{6}, \frac{1}{2})$ ligger i ytan]

Metod 1 Tangentplanet är $y = f(a,c) + f'_x(a,c)(x-a) + f'_z(a,c)(z-c)$ där $f(x,z) = \arcsin(xz)$, $a = 1$, $c = \frac{1}{2}$

[Kom ihåg $\frac{1}{\sqrt{1-t^2}}$ derivata av arcsin t]

$f(a,c) = f(1, \frac{1}{2}) = \arcsin\frac{1}{2} = \frac{\pi}{6}$

$f'_x = \frac{z}{\sqrt{1-x^2z^2}} \Rightarrow f'_x(1, \frac{1}{2}) = \frac{1/2}{\sqrt{1-1/4}} = \frac{1}{\sqrt{3}}$, $f'_z = \frac{x}{\sqrt{1-x^2z^2}} \Rightarrow f'_z(1, \frac{1}{2}) = \frac{1}{\sqrt{1-1/4}} = \frac{2}{\sqrt{3}}$

$\Rightarrow$ planet är $y = \frac{\pi}{6} + \frac{1}{\sqrt{3}}(x-1) + \frac{2}{\sqrt{3}}(z - \frac{1}{2}) \iff \underline{x - \sqrt{3}y + 2z = 2 - \frac{\sqrt{3}\pi}{6}}$

Metod 2 Skriv ytan som nivåyta $g(x,y,z) = f(x,z) - y = \arcsin(xz) - y = 0$

Normalvektor i $(1, \frac{\pi}{6}, \frac{1}{2})$ är $\nabla g(1, \frac{\pi}{6}, \frac{1}{2}) = \bar{N}$

Tangentplanet är $\bar{N} \cdot (x-a, y-b, z-c) = \bar{N} \cdot (x-1, y - \frac{\pi}{6}, z - \frac{1}{2}) = 0$

$\nabla g = (g'_x, g'_y, g'_z) = \left(\frac{z}{\sqrt{1-x^2z^2}}, -1, \frac{x}{\sqrt{1-x^2z^2}}\right) \Rightarrow$

$\nabla g(1, \frac{\pi}{6}, \frac{1}{2}) = \left(\frac{1}{\sqrt{3}}, -1, \frac{2}{\sqrt{3}}\right) = \bar{N} \Rightarrow$ planet är $\frac{1}{\sqrt{3}}(x-1) - 1 \cdot (y - \frac{\pi}{6}) + \frac{2}{\sqrt{3}}(z - \frac{1}{2}) = 0$

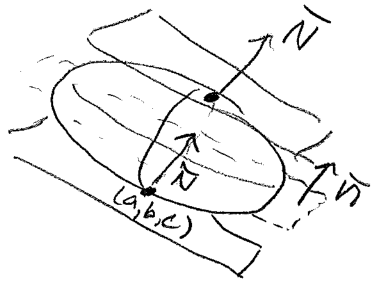
$\iff \underline{\frac{1}{\sqrt{3}}x - y + \frac{2}{\sqrt{3}}z = \frac{2}{\sqrt{3}} - \frac{\pi}{6}}$

2.50 Nivåyta $\underbrace{x^2+2y^2+3z^2+2xy+2yz}_{f(x,y,z)}=1$ (ellipsoid som ligger snett i 3D)

I vilka punkter i ytan är tangentplanet parallellt med planet $x-y+2z=0$

$\bar{n}=\begin{pmatrix}1\\-1\\2\end{pmatrix}$ normal till $x-y+2z=0$

$\bar{N}=\nabla f(a,b,c)$, normal till tangentplan i punkt (a,b,c)



Sök punkter på ytan där $\bar{n}$ och $\bar{N}$ parallella
($\Leftrightarrow$ planen parallella)

$\nabla f(x,y,z)=(2x+2y,\ 4y+2x+2z,\ 6z+2y)$

Metod 1 $\quad \bar{N}=k\cdot\bar{n}$

$$\begin{cases} 2a+2b = k\cdot 1 & (1)\\ 2a+4b+2c = k\cdot(-1) & (2)\\ 2b+6c = k\cdot 2 & (3)\end{cases}$$

$(2)-(1) \Rightarrow 2b+2c=-2k \Rightarrow$
$2b=-2c-2k$ in i $(3) \Rightarrow$
$-2c-2k+6c=2k \Rightarrow$
$4c=4k \Rightarrow \underline{c=k}$

$c=k \underset{(3)}{\Rightarrow} \underline{b=-2k} \underset{(1)}{\Rightarrow} \underline{a=\frac{5k}{2}}$ Sätt in i $a^2+2b^2+3c^2+2ab+2bc=1 \Rightarrow$

$\frac{25}{4}k^2+8k^2+3k^2-10k^2-4k^2=1 \Rightarrow \frac{13}{4}k^2=1 \Rightarrow k=\pm\frac{2}{\sqrt{13}} \Rightarrow (a,b,c)=\pm\frac{1}{\sqrt{13}}(5,-4,2)$

Extra Tangentplanen i dessa punkter är (2 punkter, stämmer med bild)

$x-y+2z=D$, (a,b,c) insatt ger $D=\pm\left(\frac{5}{\sqrt{13}}-\frac{-4}{\sqrt{13}}+2\cdot\frac{2}{\sqrt{13}}\right)=\pm\sqrt{13}$

Metod 2 $\quad \bar{N}\times\bar{n}=\bar{0}$:

$$\begin{pmatrix}2a+2b\\2a+4b+2c\\2b+6c\end{pmatrix}\times\begin{pmatrix}1\\-1\\2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2(2a+4b+2c)+(2b+6c)\\2b+6c-2(2a+2b)\\-(2a+2b)-(2a+4b+2c)\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\0\\0\end{pmatrix}$$

$$\Leftrightarrow \left(\begin{array}{ccc|c}4&10&10&0\\-4&-2&6&0\\-4&-6&-2&0\end{array}\right) \underset{\text{algebra!}}{\sim} \cdots \sim \left(\begin{array}{ccc|c}2&0&-5&0\\0&1&2&0\\0&0&0&0\end{array}\right)$$

$c=t \Rightarrow b=-2t,\ a=\frac{5}{2}t$
in i $f(a,b,c)=1$ ger

som i metod 1 $\frac{13}{4}t^2=1 \Rightarrow t=\pm\frac{2}{\sqrt{13}} \Rightarrow \underline{(a,b,c)=\pm\frac{1}{\sqrt{13}}(5,-4,2)}$

2.54

S yta : $z = f(x,y)$ (funktionsyta/graf)

S kan också skrivas som nivåyta $F(x,y,z) = f(x,y) - z = 0$

a) $\nabla f(x,y) = (f'_x, f'_y)$, vektor i 2D, pekar i den riktning f växer snabbast i

b) $\nabla F(x,y,z) = (F'_x, F'_y, F'_z) = (f'_x, f'_y, -1)$, normalvektor (i 3D) till ytan S (och till tangentplan till S)