

2.66 | Kvadratisk form till matrisform:

$$ah^2 + bhk + ck^2 = (h \ k) \begin{pmatrix} a & b/2 \\ b/2 & c \end{pmatrix} \begin{pmatrix} h \\ k \end{pmatrix} \quad (2 \text{ variabler})$$

a) $Q(h, k) = h^2 - hk + k^2 = \underbrace{h^2 - hk}_{h\text{-termer}} + k^2$
 $\uparrow \quad \uparrow$
 $++ \Rightarrow$ positivt definit

b) $Q(h, k) = h^2 + hk - k^2 = (h, k) \underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 1/2 \\ 1/2 & -1 \end{pmatrix}}_A \begin{pmatrix} h \\ k \end{pmatrix}$

Egenvärden till A: $\begin{vmatrix} 1-\lambda & 1/2 \\ 1/2 & -1-\lambda \end{vmatrix} = (1-\lambda)(-1-\lambda) - 1/4 = \lambda^2 - 5/4 = 0 \Rightarrow \lambda_{1,2} = \pm \frac{\sqrt{5}}{2}$
 $\lambda_1 > 0, \lambda_2 < 0 \Rightarrow Q$ indefinit

c) $Q(h, k) = hk$ (svårt kvadratkomplettera, ingen naturlig term att börja med)
 snabblösning: $Q(1, 1) = 1 > 0, Q(1, -1) = -1 < 0 \Rightarrow Q(h, k)$ kan vara både positiv och negativ $\Rightarrow Q$ indefinit

matrislösning: $Q(h, k) = hk = (h, k) \underbrace{\begin{pmatrix} 0 & 1/2 \\ 1/2 & 0 \end{pmatrix}}_A \begin{pmatrix} h \\ k \end{pmatrix}, \det(A - \lambda I) = \begin{vmatrix} 0-\lambda & 1/2 \\ 1/2 & 0-\lambda \end{vmatrix} = \lambda^2 - 1/4 = 0 \Rightarrow \lambda_{1,2} = \pm \frac{1}{2}$
 $\lambda_1 > 0, \lambda_2 < 0 \Rightarrow Q$ indefinit

d) $Q(h, k, l) = 6k^2 + l^2 - 6hk - 2hl + 4kl = (l-h+2k)^2 - \underbrace{h^2 + 2k^2 - 2hk}_{\text{in i enterm}} = (l-h+2k)^2 - (h+k)^2 + 3k^2$
 $\uparrow \quad \uparrow \quad \uparrow$
 $+\quad -\quad +$, tecken $++-$ $\Rightarrow Q$ indefinit

e) $Q(h, k, l) = 4hk + 4kl - 2h^2 - 3k^2 - 4l^2 = (h \ k \ l) \underbrace{\begin{pmatrix} -2 & 2 & 0 \\ 2 & -3 & 2 \\ 0 & 2 & -4 \end{pmatrix}}_A \begin{pmatrix} h \\ k \\ l \end{pmatrix}$
 Egenvärden
 hk (nollorna från $0 \cdot hl$)
 kl (nollorna från $0 \cdot hl$)

$$\begin{vmatrix} -2-\lambda & 2 & 0 \\ 2 & -3-\lambda & 2 \\ 0 & 2 & -4-\lambda \end{vmatrix} = (-2-\lambda)(-3-\lambda)(-4-\lambda) - 4(-2-\lambda) - 4(-4-\lambda) = \dots =$$

$$= -\lambda^3 - 9\lambda^2 - 18\lambda = -\lambda(\lambda^2 + 9\lambda + 18) = -\lambda(\lambda + 3)(\lambda + 6) = 0$$

$$\Rightarrow \lambda_1 = 0, \lambda_2 = -3, \lambda_3 = -6 \Rightarrow \text{tecken } -, -, 0 \Rightarrow Q \text{ negativt } \underline{\text{semidefinit}}$$