TIPS & LÖSNINGAR 2.70abc, 2.69bc, 2.62a-e

2.70 Steg 1: hitta alla stationära punkter, lös $\begin{cases} f'_x = 0 \\ f'_y = 0 \end{cases}$ olinjärt ekvationssystem, kan vara knepigt!

Steg 2: i varje stationär punkt, beräkna (med andraderivator) och undersök $Q(h,k)$

---

a) $f(x,y) = 3+4x-4y-x^2-2y^2$ $\quad \begin{cases} f'_x = 4-2x = 0 \Rightarrow x=2 \\ f'_y = -4-4y=0 \Rightarrow y=-1 \end{cases}$ $\Rightarrow (x,y)=(2,-1)$ enda stationära punkt

$f''_{xx} = -2$, $f''_{xy} = 0$, $f''_{yy} = -4$ (konstanta) $\Rightarrow$

$Q(h,k) = -2h^2 + 0\cdot 2hk - 4k^2 = -2h^2 - 4k^2$, tecken $- -$ $\Rightarrow$ negativt definit $\Downarrow$

Alt. $Hf(2,-1) = \begin{pmatrix} -2 & 0 \\ 0 & -4 \end{pmatrix}$, $\begin{vmatrix} -2-\lambda & 0 \\ 0 & -4-\lambda \end{vmatrix} = (\lambda+2)(\lambda+4) = 0 \Rightarrow \lambda_1 = -2 < 0$, $\lambda_2 = -4 < 0$ $\Rightarrow Q$ neg.def $\Rightarrow$ $\underline{(2,-1) \text{ lokalt maximum}}$

b) $f(x,y,z) = x^2+y^2+z^2-xy+2z+x$ $\quad \begin{cases} f'_x = 2x-y+1 = 0 \quad (1) \\ f'_y = 2y-x = 0 \Rightarrow x=2y \text{ in i } (1) \Rightarrow 4y-y+1=0 \Rightarrow y=-\frac{1}{3} \\ f'_z = 2z+2 = 0 \Rightarrow z=-1 \end{cases}$ $\Rightarrow x = -\frac{2}{3}$

$\Rightarrow (-\frac{2}{3}, -\frac{1}{3}, -1)$ enda stationära punkt

$f''_{xx} = 2$, $f''_{yy} = 2$, $f''_{zz} = 2$

$f''_{xy} = -1$, $f''_{xz} = 0$, $f''_{yz} = 0$ (konstanta!) $\Rightarrow$

$Q(h,k,l) = 2h^2+2k^2+2l^2-2hk+0\cdot 2hl+0\cdot 2kl = 2(h^2-hk+k^2+l^2) =$

$= 2\left((h-\frac{1}{2}k)^2 + \frac{3}{4}k^2 + l^2\right)$, tecken $+++$ $\Rightarrow Q$ positivt definit $\Rightarrow$ $\underline{(-\frac{2}{3}, -\frac{1}{3}, -1) \text{ lokalt minimum}}$

Lösn. med egenvärden, se nedan (blått)

c) $f(x,y) = xe^{-2x^2-y^2}$ $\quad \begin{cases} f'_x = 1\cdot e^{-2x^2-y^2} + x\cdot(-4x)e^{-2x^2-y^2} = (1-4x^2)e^{-2x^2-y^2} = 0 \\ f'_y = -2y\cdot xe^{-2x^2-y^2} = 0 \end{cases}$

$\Leftrightarrow \begin{cases} 1-4x^2 = 0 \quad (1) \Rightarrow x = \pm\frac{1}{2} \;(\neq 0) \underset{(2)}{\Rightarrow} y=0 \\ xy = 0 \quad (2) \end{cases}$ ger 2 stationära punkter $(\frac{1}{2},0)$, $(-\frac{1}{2},0)$

$f''_{xx} = (-8x - 4x(1-4x^2))e^{-2x^2-y^2}$, $f''_{xy} = (-2y(1-4x^2))e^{-2x^2-y^2}$, $f''_{yy} = (-2x-(-2y)\cdot 2xy)e^{-2x^2-y^2}$

	f''_{xx}	f''_{xy}	f''_{yy}
Punkt $(\frac{1}{2},0)$:	$= -4e^{-1/2}$	$= 0$	$= -e^{-1/2}$
Punkt $(-\frac{1}{2},0)$:	$= 4e^{-1/2}$	$= 0$	$= e^{-1/2}$

I punkt $(\frac{1}{2},0)$ fås $Q(h,k) = -4e^{-1/2}h^2 + \underbrace{0\cdot 2hk}_{\text{ingen blandterm}} - e^{-1/2}k^2$, tecken $- -$ $\Rightarrow$ negativt definit $\Rightarrow (\frac{1}{2},0)$ lokalt max

$\Rightarrow$ redan färdig-kvadratkompletterad

I $(-\frac{1}{2},0)$: $Q(h,k) = 4e^{-1/2}h^2 + \cancel{0\cdot 2hk} + e^{-1/2}k^2$, $++$ $\Rightarrow$ positivt definit $\Rightarrow (-\frac{1}{2},0)$ lokalt min

<u>Svar</u> Lokalt max i $(\frac{1}{2},0)$, lokalt min i $(-\frac{1}{2},0)$

b) $Hf(-\frac{2}{3},-\frac{1}{3},-1) = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$, $\begin{vmatrix} 2-\lambda & -1 & 0 \\ -1 & 2-\lambda & 0 \\ 0 & 0 & 2-\lambda \end{vmatrix} = (2-\lambda)[(2-\lambda)^2-1] = (2-\lambda)\underbrace{[\lambda^2-4\lambda+3]}_{\lambda = 2\pm\sqrt{4-3} = 2\pm 1} = 0 \Rightarrow \begin{cases} \lambda_1 = 2 > 0 \\ \lambda_2 = 3 > 0 \\ \lambda_3 = 1 > 0 \end{cases} \Rightarrow$ pos. def. $\Rightarrow$ lok. min

2.69 Vi ska avgöra om funktionen har lokalt max eller lokalt min i origo.
Obs! Man måste först kontrollera om förstaderivatorna är 0 i origo, annars är origo inte stationär punkt och man behöver inte kolla andraderivator och Q [se t.ex. 2.69d]
Om Q är semidefinit kan den inte användas för att avgöra max/min/sadel. Andra, icke-standard, metoder behövs (vi kan inte säga en metod som alltid fungerar då)

---

b) $f(x,y) = x^2+x^3-2xy+y^2 \Rightarrow \begin{cases} f'_x(x,y) = 2x+3x^2-2y \\ f'_y(x,y) = -2x+2y \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} f'_x(0,0)=0 \\ f'_y(0,0)=0 \end{cases}$

$\Rightarrow (0,0)$ stationär punkt. Max, min eller sadel?

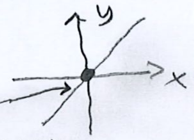
$f''_{xx}(x,y) = 2+6x$, $f''_{xy}(x,y) = -2$, $f''_{yy}(x,y) = 2 \Rightarrow f''_{xx}(0,0)=2$, $f''_{xy}(0,0)=-2$, $f''_{yy}(0,0)=2$

$\Rightarrow Q(h,k) = 2h^2-2\cdot 2hk+2k^2 = \overbrace{2(h-k)^2}^{\text{bara en term}}$, tecken $+, 0 \Rightarrow$ positivt semidef.

Alt. $Q = (h\ k)\underbrace{\begin{pmatrix} 2 & -2 \\ -2 & 2 \end{pmatrix}}_{Hf}\begin{pmatrix} h \\ k \end{pmatrix}$, $\begin{vmatrix} 2-\lambda & -2 \\ -2 & 2-\lambda \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow (2-\lambda)^2-4=0 \Rightarrow \lambda^2-4\lambda=\lambda(\lambda-4)=0 \Rightarrow \begin{cases} \lambda_1=4>0 \\ \lambda_2=0 \end{cases} \Rightarrow$ pos. semidef.

Vi kan ej med Q avgöra om sadel eller lokalt min

Vi ser att f kan skrivas $f(x,y) = (x-y)^2+x^3$. Vi har $f(0,0)=0$ och tex längs y-axeln $f(0,y) = y^2 > 0$ så snart vi lämnar origo $(y \neq 0) \Rightarrow$ f ökar
Längs linjen $y=x$ (sätt $=t$) är $f(t,t) = 0^2+t^3$ som blir <0 om $t<0 \Rightarrow$ f avtar $\Rightarrow$ f:s värde kan både växa och avta då vi lämnar origo $\Rightarrow$ origo är en sadelpunkt



$f<0$ på linjen $y=x$ då $y=x<0$

c) $f(x,y) = x^2+x^4-2xy+y^2 \Rightarrow \begin{cases} f'_x(x,y) = 2x+4x^3-2y \\ f'_y(x,y) = -2x+2y \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} f'_x(0,0)=0 \\ f'_y(0,0)=0 \end{cases} \Rightarrow (0,0)$ stationär

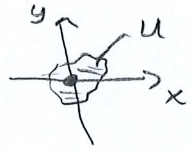
$f''_{xx}(x,y) = 2+12x^2$, $f''_{xy}(x,y) = -2$, $f''_{yy}(x,y) = 2 \Rightarrow f''_{xx}(0,0) = 2 \Rightarrow$
$Q(h,k) = 2h^2-2\cdot 2hk = 2k^2 = 2(h-k)^2$, $+\ 0 \Rightarrow$ positivt definit (precis som i b)-uppgiften $\Rightarrow$ kan ej avgöra med Q

Denna gång är $f(x,y) = \underbrace{(x-y)^2}_{\geq 0} + \underbrace{x^4}_{\geq 0} \geq 0$ för alla (x,y) och $f(0,0)=0 \Rightarrow$ f har ett lokalt min i $(0,0)$ [enligt def. av lokalt min].

$\left((x-y)^2+x^4=0 \Rightarrow x=0 \Rightarrow y=0 \text{ så } f(x,y)>0 \text{ utanför origo} \Rightarrow \text{strängt lok. min i } (0,0) \right)$

2.62 I denna uppgift ska man med definitionen avgöra om f har lokalt max eller min i origo:

f(x,y) har ett lokalt minimum i (0,0) om $f(x,y) \geq f(0,0)$ för alla $(x,y) \in U$ där U är en omgivning till U (en mängd som har (0,0) som inre punkt) [strängt om $f(x,y) > f(0,0)$ för $(x,y) \neq (0,0)$]



Man ska alltså inte beräkna några derivator i 2.62.

(att $f'_x = 0$, $f'_y = 0$, ... är inte definition av lokalt max/min, f kan ha lokalt max/min utan att f'_x eller f'_y existerar)

---

a) $f(x,y) = 1 - |x| - y^2$, $f(0,0) = 1$, $|x| > 0$ om $x \neq 0$, $y^2 > 0$ om $y \neq 0$

$\Rightarrow f(x,y) < 1$ om $(x,y) \neq (0,0)$ $\Rightarrow$ f har lokalt max i (0,0) [strängt]

b) $f(x,y) = \underbrace{|x|}_{\geq 0} \underbrace{- \cos y}_{\geq -1}$, $f(0,0) = 0 - \cos 0 = -1$ och $f(x,y) \geq -1$ för alla (x,y)

$\Rightarrow$ f har lokalt minimum i (0,0) [strängt: $|x| > 0$ och/eller $\cos y < 1$ då man lämnar origo]

c) $f(x,y) = \underbrace{|x|}_{\geq 0} + \underbrace{\cos y}_{\leq 1}$, $f(0,0) = 0 + 1 = 1$, $f(x,0) = |x| + 1 > 1$ om $x \neq 0$

$f(0,y) = \cos y < 1$ om $y \neq 0$ men y nära 0

$\Rightarrow$ f ökar då man lämnar origo längs x-axeln
f minskar då man lämnar origo längs y-axeln } $\Rightarrow$ varken max eller min i origo

d) $f(x,y,z) = x^2 - yz$, $f(0,0,0) = 0$, $f(x,0,0) = x^2 > 0$ om $x \neq 0$

linje $x = 0, y = z = t \Rightarrow f(0,t,t) = -t^2 < 0$

$\Rightarrow$ f kan både öka och minska då man rör sig från origo $\Rightarrow$ varken max eller min

e) $f(x,y,z) = \underbrace{\cos(xyz)}_{\leq 1 \text{ för alla } x,y,z}$, $f(0,0,0) = \cos 0 = 1$

$\Rightarrow$ lokalt maximum i (0,0,0)

[ej strängt, ty t ex $f(x,0,0) = \cos 0 = 1$ för alla x]