3.6, 3.7, 3.8

$\boxed{\text{Tips}}$ 3.6) Funktionalmatrisen är $\frac{\partial(x,y)}{\partial(t,\varphi)} = \begin{pmatrix} x'_t & x'_\varphi \\ y'_t & y'_\varphi \end{pmatrix} = \ldots$

3.7) Funktionalmatris $\frac{\partial(u,v,w)}{\partial(x,y,z)} = \begin{pmatrix} u'_x & u'_y & u'_z \\ v'_x & v'_y & v'_z \\ w'_x & w'_y & w'_z \end{pmatrix} = \ldots$

Avbildningen är linjär. Vad sa man i linjär algebra om inverterbarhet?

3.8) a) man kan börja lösa ut $y = ve^x = v(u-y) \Rightarrow y + vy = uv \Rightarrow (1+v)y = uv \Rightarrow$
$y = \ldots, \; x = \ldots$

b) kom ihåg $\det(A^{-1}) = \frac{1}{\det A}$ från algebran

$\boxed{\text{Lösningar}}$

3.6 $\begin{cases} x = 3t\cos\varphi \\ y = 2t\sin\varphi \end{cases} \Rightarrow \frac{\partial(x,y)}{\partial(t,\varphi)} = \begin{pmatrix} x'_t & x'_\varphi \\ y'_t & y'_\varphi \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3\cos\varphi & -3t\sin\varphi \\ 2\sin\varphi & 2t\cos\varphi \end{pmatrix}$ och

$$\frac{d(x,y)}{d(t,\varphi)} = \begin{vmatrix} 3\cos\varphi & -3t\sin\varphi \\ 2\sin\varphi & 2t\cos\varphi \end{vmatrix} = 6t\cos^2\varphi + 6t\sin^2\varphi = \underline{6t}$$

3.7 $\begin{cases} u = x+y+2z \\ v = 3x-2y+z \\ w = 5z-x-y \end{cases} \Rightarrow \frac{\partial(u,v,w)}{\partial(x,y,z)} = \begin{pmatrix} u'_x & u'_y & u'_z \\ v'_x & v'_y & v'_z \\ w'_x & w'_y & w'_z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 3 & -2 & 1 \\ -1 & -1 & 5 \end{pmatrix}$ och

$$\frac{d(u,v,w)}{d(x,y,z)} = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 3 & -2 & 1 \\ -1 & -1 & 5 \end{vmatrix} = -10-1-6-4+1-15 = \underline{-35} \neq 0$$

$\Rightarrow$ inverterbar

(linjär avbildning inverterbar $\Leftrightarrow$ determinanten $\neq 0$)

3.8 $\begin{cases} u = e^x + y & (1) \\ v = e^{-x}y & (2) \end{cases}$ $(y>0)$ a) lös ut x och y: $(2) \Rightarrow y = ve^x \underset{(1)}{=} v(u-y) \Rightarrow$

$y + vy = uv \Rightarrow y(1+v) = uv \Rightarrow y = \underline{\frac{uv}{1+v}} \Rightarrow e^x = \frac{y}{v} = \frac{u}{1+v} \Rightarrow x = \underline{\ln\frac{u}{1+v}}$

b) $\frac{d(u,v)}{d(x,y)} = \begin{vmatrix} u'_x & u'_y \\ v'_x & v'_y \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} e^x & 1 \\ -e^{-x}y & e^{-x} \end{vmatrix} = e^x \cdot e^{-x} + e^{-x} \cdot y = \underline{1 + ye^{-x}} = \underline{1+v}$

$\Rightarrow \underline{\frac{d(x,y)}{d(u,v)}} = \frac{1}{\frac{d(u,v)}{d(x,y)}} = \underline{\frac{1}{1+v}}$ [kan även beräkna $\frac{d(x,y)}{d(u,v)} = \begin{vmatrix} x'_u & x'_v \\ y'_u & y'_v \end{vmatrix} = \ldots = \frac{1}{1+v}$]