Linköpings tekniska högskola
Matematiska institutionen

Kurskod: TATA83
Provkod: TEN1

Tentamen i TATA83 (Flervariabelanalys)
2024-06-07 kl 14-19

Inga hjälpmedel tillåtna. Uppgifterna bedöms med 0-3 poäng.
Betyggränser: 8/11/14 poäng ger betyg 3/4/5.

1. (i) Beräkna gränsvärdet $\lim_{(x,y)\to(1,-5)} \frac{10x-y+2xy-5}{15x-2y+3xy-10}$ eller visa att det inte existerar (1p)

   (ii) Lös följande system av partiella differentialekvationer
$$\begin{cases} z'_x = ye^{xy} + \cos y \\ z'_y = xe^{xy} - x\sin y + 2y. \end{cases}$$
   Ange den lösning som satisfierar villkoret: $z(1,0) = 3$ (2p)

2. (i) Bestäm en tangentvektor till kurvan $(x(t), y(t), z(t)) = (\sin(2t), \sin^2 t, \cos t)$, $0 < t < 2\pi$, i punkten $(x, y, z) = (1, \frac{1}{2}, \frac{1}{\sqrt{2}})$ (1p)

   (ii) Bestäm på formen $Ax + By + Cz + D = 0$ tangentplanet till ytan $x = z^2 - 2y^2$ i punkten där $z = 1$ och $y = 2$ (1p)

   (iii) Beräkna riktningsderivatan av $f(x, y, z) = yz^2x^3$ i punkten $(-1, 2, 1)$ i den riktning som ges av vektorn $(1, 1, -1)$ (1p).

3. Bestäm alla lokala maximi- och minimipunkter samt sadelpunkter till funktionen $f(x, y) = 15(x + y) - 3yx^2 - x^3 - y^3$.

4. Finn största och minsta värden av $f(x, y) = x^2 + xy + y^2 - 3y$ då $x^2 + y^2 = 14$.

   Obs ett bivillkor.

5. Beräkna dubbelintegralen $\int_0^1 (\int_{\sqrt{y}}^1 exp(\frac{y}{x})\ dx)dy$,

   Tips. Kasta om variablerna.

6. Finn massan av kroppen som definieras $x^2 + y^2 + z^2 \leq 3$, $y \geq |x|$, med densitet $f(x, y, z) = e^{(x^2+y^2+z^2)^{\frac{3}{2}}}$.

7. Bestäm funktionalmatrisen $(\overline{f} \circ \overline{g})'(\overline{x})$ för funktionen $(\overline{f} \circ \overline{g})(\overline{x}) = \overline{f}(\overline{g}(\overline{x}))$ i punkten $\overline{x} = (x_1, x_2) = (2, 1)$ då

   $\overline{g}(\overline{x}) = (g_1(x_1, x_2), g_2(x_1, x_2)) = (-x_1 + 3x_2, 2x_1 - x_2)$ och

   $\overline{f}(\overline{u}) = (f_1(u_1, u_2), f_2(u_1, u_2)) = (\arctan(u_2), \arctan(u_1))$

1

(i) $$G = \lim_{(x,y)\to(1,-5)} \underbrace{\frac{10x - y + 2xy - 5}{15x - 2y + 3xy - 10}}_{U} = \left(\frac{0}{0}\right)$$

$$U = \frac{2x\cdot(5+y) - (5+y)}{3x\cdot(5+y) - 2(5+y)} = \frac{2x-1}{3x-2} \to \frac{2-1}{3-2} = \underline{\underline{1}} = G$$

då $(x,y)\to(1,-5)$

(ii) $$\begin{cases} z'_x = y\cdot e^{xy} + \cos y & (1) \\ z'_y = x\cdot e^{xy} - x\sin y + 2y & (2) \end{cases}$$

Integrera (1): $z = \int z'_x\,dx = \int (ye^{xy} + \cos y)\,dx =$

$= \underline{e^{xy} + x\cos y + c(y)}$ (3)

Derivera (3): $z'_y = xe^{xy} - x\sin y + c'(y) \overset{(2)}{=}$

$xe^{xy} - x\sin y + 2y$

$\Rightarrow c'(y) = 2y$ (4)

Integrera (4): $c(y) = \int c'(y)\,dy = y^2 + d,\ d \in \mathbb{R}$.

$\Rightarrow \underline{z = e^{xy} + x\cos y + y^2 + d}$ (den allmänna lösningen)

<u>Obs</u> $z(1,0) = 3$

$$z(1,0) = \underbrace{e^{1\cdot 0}}_{1} + 1\cdot\overset{1}{\cos 0} + \overset{0}{0^2} + d = 3$$

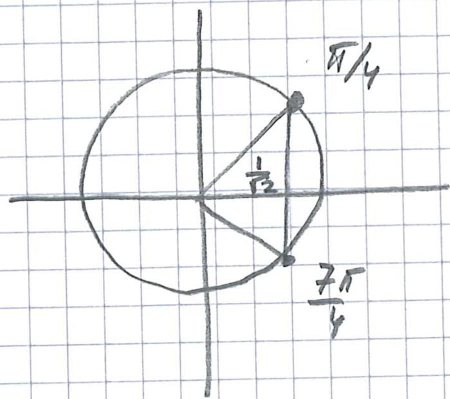
$\Rightarrow \underline{d = 1}$

$\Rightarrow$ <u>Svar:</u> $z = e^{xy} + x\cos y + y^2 + 1$

2 (i) $\bar{r}(t) = (\sin(2t),\ \sin^2 t,\ \cos t)$, $0 < t < 2\pi$,

Punkt $\left(1, \frac{1}{2}, \frac{1}{\sqrt{2}}\right)$

Finn t: $\begin{cases} \sin 2t = 1 \\ \sin^2 t = \frac{1}{2} \\ \cos t = \frac{1}{\sqrt{2}} \\ 0 < t < 2\pi \end{cases}$



$\Rightarrow$ $\underline{t = \frac{\pi}{4}}$

Tangentvektor: $\bar{r}'\left(\frac{\pi}{4}\right)$

$\bar{r}'(t) = (2\cos(2t),\ 2\sin t \cdot \cos t,\ -\sin t)$

$\bar{r}'\left(\frac{\pi}{4}\right) = \left(2\cos\left(2\cdot\frac{\pi}{4}\right),\ \sin\left(2\cdot\frac{\pi}{4}\right),\ -\sin\frac{\pi}{4}\right) =$

$= \underline{\left(0,\ 1,\ -\frac{1}{\sqrt{2}}\right)}$

(ii) $Ax + By + Cz + D = 0$ (tangentplan)

$x = z^2 - 2y^2$ i punkten där $z = 1$ o $y = 2$

Punkten: $x = 1^2 - 2\cdot 2^2 = -7 \Rightarrow$ punkten $(-7, 2, 1)$

Inför funktion: $F(x,y,z) = x + 2y^2 - z^2$

$\nabla F = (F'_x, F'_y, F'_z) = (1,\ 4y,\ -2z)$

$\nabla F(-7,2,1) = (1,\ 4\cdot 2,\ -2\cdot 1) = \underline{(1, 8, -2)}$ är

en normalvektor till ytan / tangentplanet i punkten

$\Rightarrow 1\cdot(x-(-7)) + 8\cdot(y-2) - 2(z-1) = 0$ (tangentplanet) eller $x + 8y - 2z + (7 - 16 + 2) = 0$

eller $\underline{x + 8y - 2z - 7 = 0}$

(iii) $f(x,y,z) = y z^2 x^3$, punkt $P(-1,2,1)$,
riktning $\bar{v}\,(1,1,-1)$

Riktningsderivata: $f'_{\frac{\bar{v}}{|\bar{v}|}}(P) = \nabla f(P) \cdot \frac{\bar{v}}{|\bar{v}|}$

$\frac{\bar{v}}{|\bar{v}|} = ?$: $|\bar{v}| = \sqrt{1^2 + 1^2 + (-1)^2} = \sqrt{3} \Rightarrow \frac{\bar{v}}{|\bar{v}|} = \underline{\frac{1}{\sqrt{3}}(1,1,-1)}$

Gradient: $\nabla f = (f'_x, f'_y, f'_z) = (3x^2 y z^2, z^2 x^3, 2x^3 y z)$

$\nabla f(P) = (3\cdot(-1)^2 \cdot 2 \cdot 1^2, 1^2 \cdot (-1)^3, 2\cdot(-1)^3 \cdot 2 \cdot 1) =$

$= \underline{(6, -1, -4)}$ Skalärprodukt

$\Rightarrow f'_{\frac{\bar{v}}{|\bar{v}|}}(P) = (6,-1,-4) \cdot \frac{1}{\sqrt{3}}(1,1,-1) =$

$= \frac{1}{\sqrt{3}}(6 - 1 + 4) = \frac{9}{\sqrt{3}} = \underline{3\cdot\sqrt{3}}$

③ Lokala extrempunkter samt sadelpunkter av

$f(x,y) = 15(x+y) - 3yx^2 - x^3 - y^3$

stationära punkter: $\begin{cases} f'_x = 0 \\ f'_y = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 15 - 6xy - 3x^2 = 0 & (1) \\ 15 - 3x^2 - 3y^2 = 0 & (2) \end{cases}$

$\Leftrightarrow \begin{cases} 5 - 2xy - x^2 = 0 & (1)' \\ 5 - x^2 - y^2 = 0 & (2)' \end{cases}$ $(1)' - (2)'$: $y^2 - 2xy = 0$
eller $y(y - 2x) = 0$

(a) $y = 0 \longrightarrow (1)'$: $x = \pm\sqrt{5} \Rightarrow P_1(\sqrt{5}, 0),\ P_2(-\sqrt{5}, 0)$

(b) $y = 2x \longrightarrow (2)'$: $5 = 5x^2 \Leftrightarrow x = \pm 1 \Rightarrow$

$P_3(1, 2),\ P_4(-1, -2)$

$P_1, \ldots, P_4$ är stationära punkter.

Kvadratisk form: $Q(h,k) = f''_{xx} \cdot h^2 + 2f''_{xy} \cdot hk + f''_{yy} \cdot k^2$

$$\begin{cases} f''_{xx} = (f'_x)'_x = -6y - 6x \\ f''_{xy} = (f'_x)'_y = -6x \\ f''_{yy} = (f'_y)'_y = -6y \end{cases}$$

	P_1	P_2	P_3	P_4
f''_{xx}	$-6\cdot\sqrt{5}$	$6\cdot\sqrt{5}$	-18	18
f''_{xy}	$-6\sqrt{5}$	$6\sqrt{5}$	-6	6
f''_{yy}	0	0	-12	12

P_1 : $Q_1(h,k) = -6\sqrt{5}\,h^2 - 12\sqrt{5}\,hk = -6\sqrt{5}(h^2 + 2hk)$
$= -6\sqrt{5}\left((h+k)^2 - k^2\right)$, indef., P_1 är en sadelp.

P_2 : $Q_2(h,k) = 6\sqrt{5}\left((h+k)^2 - k^2\right)$, indef, P_2 —〃—

P_3 : $Q_3(h,k) = -18h^2 - 12hk - 12k^2 = -3(6h^2 + 4hk + 4k^2)$
$= -3\left((2k+h)^2 + 5h^2\right)$, neg. def, P_3 är en str. lok max

5

P_4: $Q_4(h,k) = 3\left((2k+h)^2 + 5h^2\right)$, pos. def.

P_4 är en str. lok. min

4) $f(x,y) = x^2 + xy + y^2 - 3y \longrightarrow$ max/min

då $x^2+y^2=14$.

Obs 1) ett bivillkor: $x^2+y^2=14$ (en cirkel med rad $=\sqrt{14}$)

2) f är en kont. funktion på ett kompakt område (cirkeln) $\Rightarrow$ max/min existerar.

Inför $g(x,y) = x^2+y^2$.

Alla extrempunkter är i lösningsmängden till

$$\begin{cases} \nabla f, \nabla g \text{ är lin. beroende} \\ g = 14 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \begin{vmatrix} f'_x & f'_y \\ g'_x & g'_y \end{vmatrix} = 0 \\ g = 14 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \begin{vmatrix} (2x+y) & (x+2y-3) \\ 2x & 2y \end{vmatrix} = 0 \\ g = 14 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (4xy+2y^2) - 2x(x+2y-3) = 0 \\ x^2+y^2 = 14 \end{cases}$$

$$\begin{cases} y^2 - x^2 + 3x = 0 & (1) \\ x^2+y^2 = 14 \end{cases} \quad (2) \Rightarrow y^2 = 14 - x^2 \quad (1): (14-x^2) - x^2 + 3x = 0$$

eller $2x^2 - 3x - 14 = 0 \Leftrightarrow x_{1,2} = \dfrac{3 \pm \sqrt{9+112}}{4} = \dfrac{3 \pm 11}{4}$

eller $x_1 = -2$, $x_2 = \dfrac{7}{2}$

Fall $x_1 = -2$: $y^2 = 14 - (-2)^2 = 10 \Leftrightarrow y = \pm\sqrt{10}$

$\Rightarrow P_1(-2, \sqrt{10}), P_2(-2, -\sqrt{10})$ Kandidater

Fall $x_2 = \frac{7}{2}$: $y^2 = 14 - \left(\frac{7}{2}\right)^2 = \frac{2\cdot 7\cdot 2^2 - 7^2}{4} = \frac{7(8-7)}{4} =$

$= \frac{7}{4} \Leftrightarrow y = \pm \frac{\sqrt{7}}{2}$

$\Rightarrow P_3\left(\frac{7}{2}, \frac{\sqrt{7}}{2}\right), \; P_4\left(\frac{7}{2}, -\frac{\sqrt{7}}{2}\right)$ Kandidater

Kandidatvärde:

$f(P_1) = \underbrace{(-2)^2}_{=4} + (-2)\cdot\sqrt{10} + \underbrace{(\sqrt{10})^2}_{=10} - 3\cdot\sqrt{10} = \underline{14 - 5\sqrt{10}}$

$f(P_2) = \underbrace{(-2)^2}_{=4} + 2\cdot\sqrt{10} + \underbrace{(-\sqrt{10})^2}_{=10} - 3\cdot(-\sqrt{10}) = \underline{14 + 5\sqrt{10}}$

$f(P_3) = \underbrace{\left(\frac{7}{2}\right)^2}_{=\frac{7^2}{4}} + \frac{7}{2}\cdot\frac{\sqrt{7}}{2} + \underbrace{\left(\frac{\sqrt{7}}{2}\right)^2}_{=\frac{7}{4}} - 3\cdot\frac{\sqrt{7}}{2} =$

$\left(\frac{49}{4} + \frac{7}{4}\right) + \left(\frac{7}{2} - 3\right)\cdot\frac{\sqrt{7}}{2} = \underline{14 + \frac{\sqrt{7}}{4}}$

$f(P_4) = \left(\frac{7}{2}\right)^2 - \frac{7}{2}\cdot\frac{\sqrt{7}}{2} + \left(-\frac{\sqrt{7}}{2}\right)^2 + 3\cdot\frac{\sqrt{7}}{2} =$

$= \underline{14 - \frac{\sqrt{7}}{4}}$

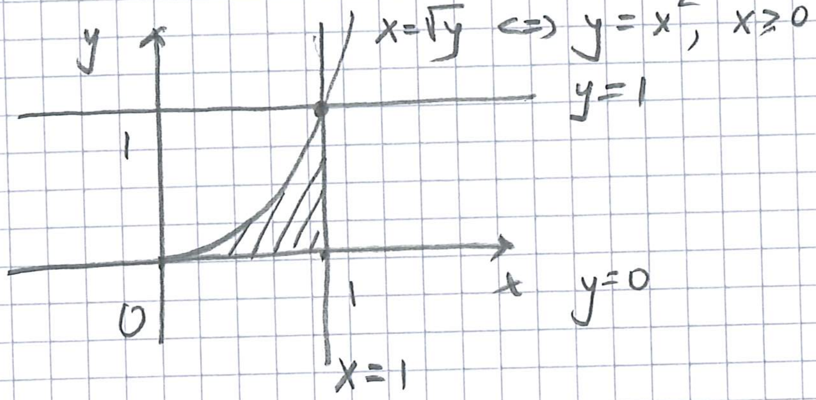
Välj max / min av kandidatvärde:

$\max f = 14 + 5\sqrt{10}$ antas i P_2

$\min f = 14 - 5\sqrt{10}$ antas i P_1

5 $$I = \int_{y=0}^{y=1}\left(\int_{\sqrt{y}=x}^{1=x} \exp\left(\frac{y}{x}\right) dx\right) dy = \iint_{D} \exp \frac{y}{x}\, dx dy$$

D:



Kasta om variablerna:

$$I = \int_0^1\left(\int_0^{x^2} e^{y/x} dy\right) dx = \left| \begin{matrix} t = \frac{y}{x} & dy = x\,dt \\ dt = \frac{dy}{\cancel{x}} & \end{matrix} \right|$$

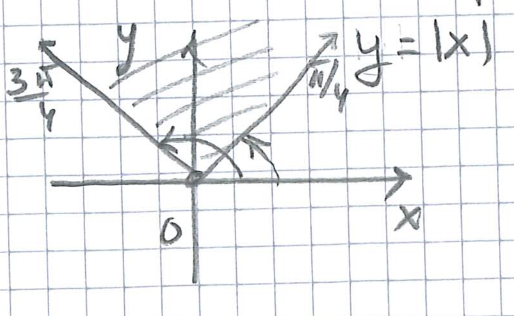
$$= \int_0^1\left(\int_{y=0}^{y=x^2} e^t \cdot x\,dt\right) dx = \int_0^1 x \cdot e^t \Big|_{y=0}^{y=x^2} dx =$$

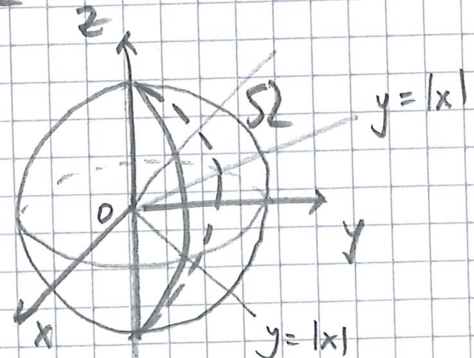
$$= \int_0^1 x \cdot e^{\frac{y}{x}} \Big|_0^{x^2} dx = \int_0^1 x\left(e^x - \underset{1}{\underset{\shortparallel}{e^0}}\right) dx = \int_0^1 (xe^x - x)\,dx =$$

$$= \left(xe^x - e^x - \frac{x^2}{2}\right)\Big|_0^1 = \left(1 \cdot e^1 - e^1 - \frac{1}{2}\right) - (-1) = \underline{\frac{1}{2}}$$

6 Massan = ? $\Omega = \{x^2+y^2+z^2 \leq 3,\ y \geq |x|\}$

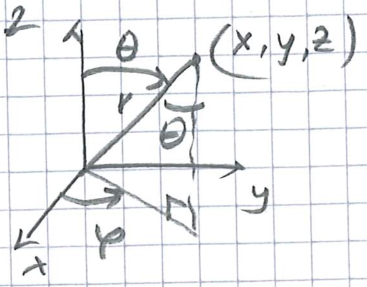
densitet $f = e^{(x^2+y^2+z^2)^{3/2}}$





(8)

Använd sfäriska koordinater:



$$\begin{cases} x = r\cdot \sin\theta \cdot \cos\varphi \\ y = r\cdot \sin\theta \cdot \sin\varphi \\ z = r\cdot \cos\theta \end{cases} \qquad \left|\frac{d\,xyz}{d\,r\varphi\theta}\right| = r^2 \sin\theta$$

$$M = \iiint_{\Omega} f(x,y,z)\,dx\,dy\,dz = \iiint e^{r^3}\cdot r^2 \cdot \sin\theta\,dr\,d\varphi\,d\theta$$

$$\frac{\pi}{4} \le \varphi \le \frac{3\pi}{4}$$
$$0 \le \theta \le \pi$$
$$0 \le r \le \sqrt{3}$$

$$= \Big(\underbrace{\int_{\pi/4}^{3\pi/4} d\varphi}_{=\pi/2}\Big)\cdot\Big(\underbrace{\int_0^{\pi} \sin\theta\,d\theta}_{=-\cos\theta\Big|_0^{\pi} = 2}\Big)\cdot\Big(\underbrace{\int_0^{\sqrt{3}} r^2 e^{r^3}\,dr}_{= I}\Big)$$

$$I = \left| \begin{matrix} t = r^3 \\ dt = 3r^2\,dt \end{matrix} \quad r^2 dt = \frac{dt}{3} \right| = \int_{r=0}^{r=\sqrt{3}} e^t \cdot \frac{dt}{3} =$$

$$= \frac{1}{3} e^t \Big|_{r=0}^{r=\sqrt{3}} = \frac{1}{3} e^{r^3}\Big|_0^{\sqrt{3}} = \frac{1}{3}\left(e^{3\sqrt{3}} - e^0\right) = \frac{1}{3}\left(e^{3\sqrt{3}} - 1\right)$$

$$\Rightarrow M = \frac{\pi}{2}\cdot 2 \cdot \frac{1}{3}\left(e^{3\sqrt{3}} - 1\right) = \underline{\frac{\pi}{3}\left(e^{3\sqrt{3}} - 1\right)}$$

(7) Kedjeregeln $(\bar{f} \circ \bar{g})'(\bar{x}) = \bar{f}'(\bar{g}(\bar{x})) \cdot \bar{g}'(\bar{x})$

Ok $\bar{g}'(\bar{x}) = \begin{bmatrix} -1 & 3 \\ 2 & -1 \end{bmatrix}$ bl.a. $\bar{g}'(2,1) = \begin{bmatrix} -1 & 3 \\ 2 & -1 \end{bmatrix}$

$\bar{f}'(\bar{u}) = \begin{bmatrix} 0 & \frac{1}{1+u_2^2} \\ \frac{1}{1+u_1^2} & 0 \end{bmatrix}$, $\bar{g}(2,1) = (-2+3\cdot 1,\ 2\cdot 2 - 1) =$
$= (1, 3)$,

$$\Rightarrow \bar{f}'(1,3) = \begin{bmatrix} 0 & \frac{1}{1+3^2} \\ \frac{1}{1+1^2} & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & \frac{1}{10} \\ \frac{1}{2} & 0 \end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow (\bar{f} \circ \bar{g})'(2,1) = \begin{bmatrix} 0 & \frac{1}{10} \\ \frac{1}{2} & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} -1 & 3 \\ 2 & -1 \end{bmatrix} =$$

$$= \begin{bmatrix} \frac{1}{5} & -\frac{1}{10} \\ -\frac{1}{2} & \frac{3}{2} \end{bmatrix}$$