LINKÖPINGS TEKNISKA HÖGSKOLA
Matematiska institutionen

KURSKOD: TATA83
Provkod: TEN1

TENTAMEN I TATA83 (FLERVARIABELANALYS)
2024-08-21 KL 14-19

Inga hjälpmedel tillåtna. Uppgifterna bedöms med 0-3 poäng.
Betyggränser: 8/11/14 poäng ger betyg 3/4/5.

1. (i) $\lim_{(x,y)\to(-2,2)} \frac{xy-3x+2y-6}{xy-x+2y-2}$ (1p)

   (ii) Lös följande system av partiella differentialekvationer

   $$\begin{cases} f'_x = -x^5 + xye^x \\ f'_y = (x-1)e^x + sin(y) \end{cases}$$

   Ange den lösning som satisfierar villkoret $f(0,0) = 3$ (2p).

2. Bestäm alla punkter på ytan $x^2 + 2y^2 + 3z^2 + 2xy + 2yz = 1$ i vilka tangentplanet är parallellt med planet $x + y + z = 0$ samt motsvarande tangentplan.

3. (i) Finn alla derivator för $f(x,y) = x^3y^2 - 2xy + y^2 - 4x + 1$ av ord 1 och 2 i punkten $(1,2)$, (1p)

   (ii) Taylorutveckla funktionen $f(x,y)$ från (i) till ordning 2 kring punkten $(1,2)$.
   Använd $h = x - 1$ och $k = y - 2$ för att skriva formeln (2p).

4. Bestäm alla lokala maximi- och minimipunkter samt sadelpunkter till funktionen $f(x,y) = x^2 + xy + 2y^2 + y^3 + 2$.

5. Bestäm största och minsta värde, om de finns, av funktionen
   $f(x,y) = x^2 + 2y^2 - y + 1$ då $x^2 + y^2 \leq 25$.

6. Beräkna dubbelintegralen $\int\int_D (2x+y) \cdot sin(3x)\, dxdy$,
   där D ges av olikheterna $-1 \leq 2x + y \leq 1,\ 0 \leq x - y \leq 1$.

7. Beräkna trippelintegralen $\int\int\int_D (\sqrt{x^2+y^2+z^2} - z) dxdydz$,
   där $D = \{(x,y,z) : x^2 + y^2 + z^2 \leq 3, x \geq 0, y \geq 0, z \leq 0\}$

1 (i) $$\lim_{(x,y)\to(-2,2)} \underbrace{\frac{xy-3x+2y-6}{xy-x+2y-2}}_{U} = G$$

$$U\Big|_{\substack{x=-2\\ y=2}} = \frac{(-2)\cdot 2 - 3\cdot(-2)+2\cdot 2-6}{(-2)\cdot 2-(-2)+2\cdot 2-2} = \frac{0}{0}$$

Utryck! $$U = \frac{x(y-3)+2(y-3)}{x(y-1)+2(y-1)} =$$

$$= \frac{(y-3)\cancel{(x+2)}}{(y-1)\cancel{(x+2)}} = \frac{y-3}{y-1}$$

$$G = \lim_{(x,y)\to(-2,2)} \frac{y-3}{y-1} = \frac{2-3}{2-1} = \frac{-1}{1} = \underline{-1}$$

(ii) $$\begin{cases} f'_x = -x^5 + xye^x & (1) \\ f'_y = (x-1)e^x + \sin y & (2) \end{cases} \qquad f(0,0)=3$$

Integrera (1) m a p x:

$$f(x,y) = \int f'_x\,dx = \int\left(-x^5+xye^x\right)dx =$$

$$= -\frac{x^6}{6} + y\left(xe^x - e^x\right) + c(y) \qquad (3)$$

Derivera (3) m a p y:

$$f'_y = xe^x - e^x + c'(y) \overset{(2)}{=} (x-1)e^x + \sin y$$

$$\Rightarrow \quad c'(y) = \sin y \quad \Rightarrow \quad c(y) = \int \sin y\,dy = -\cos y + d, \quad d\in\mathbb{R}.$$

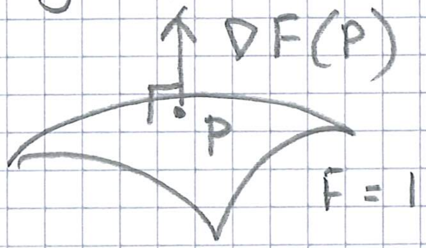
$\Rightarrow f(x,y) = -\frac{x^6}{6} + ye^x(x-1) - \cos y + d, \quad d \in \mathbb{R}.$

Obs $\quad f(0,0) = 0 + 0 - 1 + d = 3 \Rightarrow d = 4$

Svar: $\quad \underline{f(x,y) = -\frac{x^6}{6} + ye^x(x-1) - \cos y + 4}$

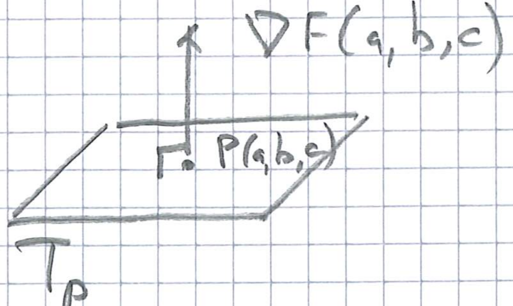
2 $\quad$ yta $\quad \underbrace{x^2 + 2y^2 + 3z^2 + 2xy + 2yz}_{\text{Inför: } F(x,y,z)} = 1$

ytan är en nivåyta $F = 1$.

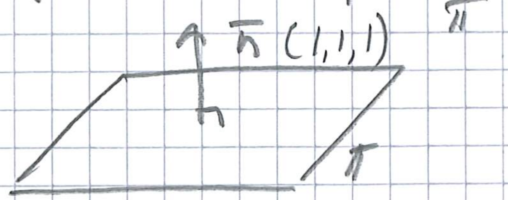


$\nabla F = (F'_x, F'_y, F'_z) \perp$ ytan (tangentplan)

$\nabla F = (2x + 2y,\ 4y + 2x + 2z,\ 6z + 2y).$



$T_p \parallel \underbrace{x + y + z = 0}_{\pi}$



Obs $\begin{cases} \nabla F(a,b,c) \parallel \bar{n} \\ P(a,b,c) \in \text{ytan} \end{cases} \Rightarrow P \in T_p.$

$\Updownarrow$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 2(a+b) = k\cdot 1 & (1) \\ 2(a+2b+c) = k\cdot 1 & (2) \\ 2(b+3c) = k\cdot 1 & (3) \\ a^2+2b^2+3c^2+2ab+2bc = 1 & (4) \end{cases}$$

$(2)-(1)$: $\quad b+c=0 \quad (5)$

$(3)-(5)$: $\quad 2c = \frac{k}{2} \quad \Rightarrow \underline{c = \frac{k}{4}} \quad (3)$

$\Rightarrow \underline{b = -\frac{k}{4}} \quad (1) \Rightarrow \underline{a = \frac{3}{4}k}$

Insättning a, b, c i (4) ger:

$\left(\frac{3}{4}k\right)^2 + 2\cdot\left(-\frac{k}{4}\right)^2 + 3\cdot\left(\frac{k}{4}\right)^2 + 2\cdot\frac{3}{4}k\cdot\left(-\frac{k}{4}\right) +$

$+ 2\cdot\left(-\frac{k}{4}\right)\cdot\frac{k}{4} = 1$ eller $\frac{k^2}{4^2}(9+2+3-6-2)=1$

eller $\frac{k^2\cdot 6}{4^2} = 1 \Leftrightarrow k = \pm\sqrt{\frac{8}{3}}$

Vi får två punkter:

$P_1\left(\frac{3}{4}\cdot\sqrt{\frac{8}{3}}, -\frac{1}{4}\sqrt{\frac{8}{3}}, \frac{1}{4}\sqrt{\frac{8}{3}}\right)$ $\quad \underline{o}$

$P_2\left(-\frac{3}{4}\sqrt{\frac{8}{3}}, \frac{1}{4}\sqrt{\frac{8}{3}}, -\frac{1}{4}\sqrt{\frac{8}{3}}\right)$

Motsvarande plan:

$T_1: \left(x-\frac{3}{4}\sqrt{\frac{8}{3}}\right) + \left(y+\frac{1}{4}\sqrt{\frac{8}{3}}\right) + \left(z-\frac{1}{4}\sqrt{\frac{8}{3}}\right) = 0$

$T_2: \left(x+\frac{3}{4}\sqrt{\frac{8}{3}}\right) + \left(y-\frac{1}{4}\sqrt{\frac{8}{3}}\right) + \left(z+\frac{1}{4}\sqrt{\frac{8}{3}}\right) = 0$ eller

$T_1: \quad x+y+z-\frac{3}{4}\sqrt{\frac{8}{3}}=0$

$T_2: \quad x+y+z+\frac{3}{4}\sqrt{\frac{8}{3}}=0$

(3) Taylorutveckla $f(x,y)=x^3y^2-2xy+y^2-4x+1$

(i)&(ii) till ord 2 i $P(1,2)$.

(i) $f(P)=1^3\cdot 2^2-2\cdot 1\cdot 2+2^2-4\cdot 1+1=4-4+4-4+1=\underline{1}$

$f'_x=3x^2y^2-2y-4, \quad f'_x(P)=3\cdot 1^2\cdot 2^2-2\cdot 2-4=$
$=12-4-4=\underline{4}$

$f'_y=2x^3y-2x+2y, \quad f'_y(P)=2\cdot 1^3\cdot 2-2\cdot 1+2\cdot 2=$
$=4-2+4=\underline{6}$

$f''_{xx}=6xy^2, \quad f''_{xx}(P)=6\cdot 1\cdot 2^2=6\cdot 4=\underline{24}$

$f''_{xy}=6x^2y-2, \quad f''_{xy}(P)=6\cdot 1^2\cdot 2-2=12-2=\underline{10}$

$f''_{yy}=2x^3+2, \quad f''_{yy}(P)=2\cdot 1^3+2=\underline{4}$

(ii) $x=1+h, \quad y=2+k$

$f(x,y)=f(1+h,2+k)=1+4\cdot h+6\cdot k+\frac{1}{2}(24h^2+2\cdot 10\cdot hk+$
$+4k^2)+O((h^2+k^2)^{3/2})=$
$=\underline{1+4h+6k+12h^2+10hk+2k^2+O((h^2+k^2)^{3/2})}$

4 Finn lok. extrempunkter samt alla sadelpunkter.

$$f(x,y) = x^2 + xy + 2y^2 + y^3 + 2$$

(i) stationära punkter: $\nabla f = \bar{0} \Leftrightarrow \begin{cases} f'_x = 0 \\ f'_y = 0 \end{cases}$

$$\begin{cases} 2x + y = 0 & (1) \\ x + 4y + 3y^2 = 0 & (2) \end{cases}$$

$(1): \; y = -2x \quad (2): \; x + 4\cdot(-2x) + 3\cdot(-2x)^2 = 0$

eller $x - 8x + 12x^2 = 0$ eller $12x^2 - 7x = 0 \Leftrightarrow$

$x_1 = 0, \quad x_2 = \frac{7}{12} \Rightarrow y_1 = 0, \quad y_2 = -\frac{7}{6}$

$\Rightarrow \; P_1(0,0), \quad P_2\left(\frac{7}{12}, -\frac{7}{6}\right)$

(ii) $Q_P(h,k) = f''_{xx}(P)h^2 + 2f''_{xy}(P)hk + f''_{yy}(P)k^2$

	P_1	P_2
$f''_{xx} = (f'_x)'_x = 2$	2	2
$f''_{xy} = (f'_x)'_y = 1$	1	1
$f''_{yy} = (f'_y)'_y = 4 + 6y$	4	-3

P_1: $Q_1(h,k) = 2h^2 + 2\cdot 1\cdot hk + 4k^2 = 2(h^2 + hk + 2k^2) =$
$= 2\left(\left(h + \frac{k}{2}\right)^2 - \frac{k^2}{4} + 2k^2\right) = 2\cdot\left(h + \frac{k}{2}\right)^2 + \frac{7}{2}k^2$, pos. def.

$\Rightarrow P_1$ är en str. lok. minimipunkt.

P_2: $Q_2(h,k) = 2h^2 + 2\cdot 1 \cdot hk - 3k^2 =$

$= 2\left(h^2 + hk - \frac{3}{2}k^2\right) = 2\left(\left(h+\frac{k}{2}\right)^2 - \frac{k^2}{4} - \frac{3}{2}k^2\right) =$

$= 2\left(h+\frac{k}{2}\right)^2 - \frac{7}{2}k^2$, indef, $\Rightarrow$

P_2 är en sadelpunkt

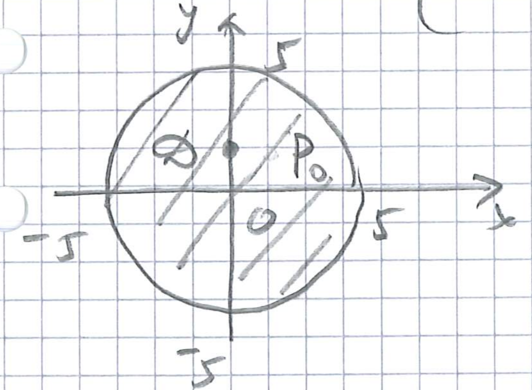
(5) $f \to$ max/min på $D = \{x^2+y^2 \le 25\}$

$f(x,y) = x^2 + 2y^2 - y + 1$

Obs 1) f är kontin. på D } $\Rightarrow$ f har max/min på D.
2) D är kompakt

(i) Inre stationära punkter:

$\nabla f = \bar{0} \Leftrightarrow \begin{cases} f'_x = 0 \\ f'_y = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2x = 0 \\ 4y - 1 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow P_0\left(0, \frac{1}{4}\right)$ (Kandidat)



$f(P_0) = 0^2 + 2\cdot\left(\frac{1}{4}\right)^2 - \frac{1}{4} + 1 =$

$= \underbrace{\frac{1}{8} - \frac{1}{4}}_{-\frac{1}{8}} + 1 = \frac{7}{8}$ (kandidat värde)

(ii) Randundersökning:

Obs $BdB = \{\underbrace{x^2+y^2}_{g(x,y)} = 5^2\}$. Tolka den som ett bivillkor

Kandidatpunkter på randen:

$$\begin{cases} \nabla f, \nabla g \text{ är lin. beroende} \\ g = 5 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \begin{vmatrix} f'_x & f'_y \\ g'_x & g'_y \end{vmatrix} = 0 \\ g = 5 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \begin{vmatrix} 2x & (4y-1) \\ 2x & 2y \end{vmatrix} = 0 \\ x^2+y^2 = 25 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2x\cdot(2y-4y+1) = 0 \\ x^2+y^2 = 25 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\begin{cases} x\cdot(1-2y) = 0 & (1) \\ x^2+y^2 = 25 & (2) \end{cases} \qquad (1): \ x = 0 \text{ eller } y = \frac{1}{2}$$

$x = 0 \rightarrow (2) \quad y^2 = 25 \Leftrightarrow y = \pm 5 \Rightarrow \underline{P_1(0,5),\ P_2(0,-5)}$

$y = \frac{1}{2} \rightarrow (2) \quad x^2 = 25 - \frac{1}{4} = \frac{99}{4} \Leftrightarrow x = \pm \frac{3}{2}\sqrt{11}$

$\Rightarrow \underline{P_3\left(\frac{3}{2}\sqrt{11}, \frac{1}{2}\right),\ P_4\left(-\frac{3}{2}\sqrt{11}, \frac{1}{2}\right)}$ (kandidater)

$f(P_1) = 0 + 2\cdot 5^2 - 5 + 1 = 50 - 5 + 1 = \underline{46}$

$f(P_2) = 0 + 2\cdot(-5)^2 - (-5) + 1 = 50 + 5 + 1 = \underline{56}$

$f(P_3) = \left(\frac{3}{2}\sqrt{11}\right)^2 + 2\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^2 - \frac{1}{2} + 1 = \frac{99}{4} + \frac{1}{2} - \frac{1}{2} + 1 =$

$= \underline{\frac{103}{4}}$, $\quad f(P_4) = \underline{\frac{103}{4}} = 25\frac{3}{4}$ (Kandidatvärde)

(iii) Välj max o min av funna kandidatvärden

$\left\{ \frac{7}{8}, 46, 56, \frac{103}{4} \right\} \Rightarrow$

$\max_{D} f = 56$ antas i $P_2(0,-5)$

$\min_{D} f = \frac{7}{8}$ antas i $P_0(0, \frac{1}{4})$

6 Beräkna $I = \iint_D (2x+y) \cdot \sin(3x)\, dx\, dy$

$D = \{-1 \le 2x+y \le 1, \quad 0 \le x-y \le 1\}$.

Lsg: Inför $\begin{cases} u = 2x+y \\ v = x-y \end{cases} \Rightarrow$ Obs $3x = u+v$

$$I = \iint_{\substack{-1 \le u \le 1 \\ 0 \le v \le 1}} u \cdot \sin(u+v) \cdot \left|\frac{d(x\,y)}{d(u\,v)}\right| du\, dv$$

Obs $\frac{d\,uv}{d\,xy} = \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 1 & -1 \end{vmatrix} = -3 \Rightarrow \left|\frac{d(xy)}{d(uv)}\right| = \frac{1}{3}$

$$\Rightarrow I = \int_{-1}^{1} u \left(\int_0^1 u \cdot \sin(u+v) \cdot \frac{1}{3}\, dv \right) du =$$

$$= \frac{1}{3} \int_{-1}^{1} u \left(\int_0^1 \sin(u+v)\, dv \right) du = \frac{1}{3} \int_{-1}^{1} u \cdot \Big(-\cos(u+v) \Big) \Big|_0^1 du$$

$$= \frac{-1}{3} \int_{-1}^{1} u \cdot \big(\cos(u+1) - \cos u \big) du = -\frac{1}{3} \int_{-1}^{1} u \cdot \cos(u+1)\, du$$

udda funktion

$\sin(u+1)$, 1

$$\stackrel{p.i.}{=} -\frac{1}{3} \left(\Big[u \cdot \sin(u+1) \Big]_{-1}^{1} - \int_{-1}^{1} 1 \cdot \sin(u+1)\, du \right) =$$

$$-\frac{1}{3}\left(1\cdot\sin 2 - 0 - \left(-\cos(u+1)\right)\Big|_{-1}^{1}\right) =$$

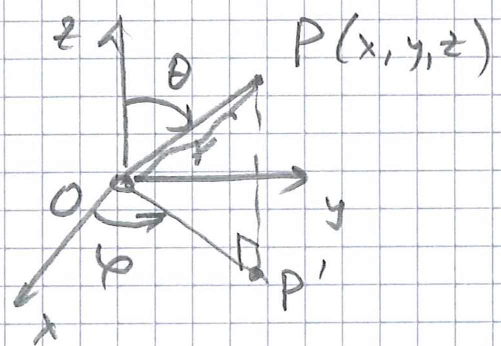
$$= -\frac{1}{3}\left(\sin 2 + \cos 2 - 1\right)$$

7) Beräkna $I = \iiint\limits_{D} \left(\sqrt{x^2+y^2+z^2} - 2\right) dx\,dy\,dz$

där $D = \{ x^2+y^2+z^2 \le 3,\ x \ge 0,\ y \ge 0,\ z \le 0 \}$.

Använd sfäriska koordinater:

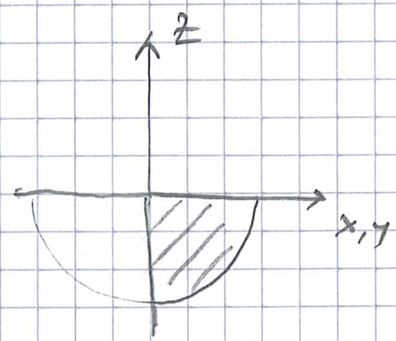
$$\begin{cases} x = r\sin\theta\cos\varphi \\ y = r\sin\theta\sin\varphi \\ z = r\cos\theta \end{cases}$$



Obs 1) $\left|\dfrac{d\,xyz}{d\,r\varphi\theta}\right| = r^2\cdot\sin\theta$

2) $D_{r\varphi\theta} = \begin{cases} 0 \le r \le \sqrt{3} \\ 0 \le \varphi \le \pi/2 \\ \frac{\pi}{2} \le \theta \le \pi \end{cases}$,

3) $x^2+y^2+z^2 = r^2$,



$$\Rightarrow I = \iiint\limits_{D_{r\varphi\theta}} \left(r - r\cos\theta\right) r^2\sin\theta\, dr\, d\varphi\, d\theta =$$

$$= \iiint\limits_{D_{r\varphi\theta}} r^3\left(1 - \cos\theta\right)\sin\theta\, dr\, d\varphi\, d\theta =$$

$$= \underbrace{\int_0^{2\pi/2} d\varphi}_{\frac{2\pi}{2}} \cdot \underbrace{\int_0^{\sqrt{3}} r^3\,dr}_{\left.\frac{r^4}{4}\right|_0^{\sqrt{3}} = \frac{9}{4}} \cdot \underbrace{\int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} (1-\cos\theta)\sin\theta\,d\theta}_{I_1}$$

$$I_1 = \left| \begin{array}{l} t = \cos\theta \\ dt = -\sin\theta\,d\theta \end{array} \right| = -\int_{\theta=\pi/2}^{\theta=\pi} (1-t)\,dt = \int_{\theta=\pi/2}^{\theta=\pi} (t-1)\,dt =$$

$$= \left[\frac{t^2}{2} - t\right]_{\theta=\pi/2}^{\theta=\pi} = \left[\frac{\cos^2\theta}{2} - \cos\theta\right]_{\pi/2}^{\pi} = \left(\frac{(-1)^2}{2} - (-1)\right) - 0 =$$

$$= \frac{3}{2}$$

$$\Rightarrow \underline{I} = \frac{2\pi}{2} \cdot \frac{9}{4} \cdot \frac{3}{\cancel{2}} = \underline{\frac{27}{16}\pi}$$