LINKÖPINGS TEKNISKA HÖGSKOLA
Matematiska institutionen

KURSKOD: TATA83
Provkod: TEN1

TENTAMEN I TATA83 (FLERVARIABELANALYS)
2025-03-24 KL 14-19

Inga hjälpmedel tillåtna. Uppgifterna bedöms med 0-3 poäng.
Betyggränser: 8/11/14 poäng ger betyg 3/4/5.

1. (i) Låt $f(x,y) = y^2\sqrt{x}$. Beräkna $f'_y(4,1)$ genom att använda definitionen av partiell derivata som ett gränsvärde. (1p)

   (ii) Bestäm lösningen $f(x,y)$ till den partiella differentialekvationer
   $$xf'_x - 2yf'_y = 18y$$
   med bivillkoret $f(3,y) = 5$, genom att byta till variablerna $u = x^2y$ och $v = y$. (2p)

2. (i) Bestäm punkten på kurvan $(x(t), y(t), z(t)) = (e^t, \cos^2 t, \sin t)$, $t \in R$, som svarar mot $t = \frac{\pi}{4}$ samt en tangentvektor till kurvan i punkten (1p)

   (ii) Bestäm på formen $Ax + By + Cz + D = 0$ tangentplanet till ytan $x = 2y^2 + z^2$ i punkten där $y = 1$ och $z = 2$. (1p)

   (iii) Beräkna riktningsderivatan av $f(x,y,z) = xyz^4$ i punkten $(-1,1,2)$ i den riktning som ges av vektorn $(1,-1,1)$ (1p).

3. Bestäm alla lokala maximi- och minimipunkter samt sadelpunkter till funktionen $f(x,y) = x^3 + 3xy^2 - 15x - 12y + 1$.

4. Bestäm funktionalmatrisen $(\overline{f} \circ \overline{g})'(\overline{x})$ för funktionen $(\overline{f} \circ \overline{g})(\overline{x}) = \overline{f}(\overline{g}(\overline{x}))$ i punkten $\overline{x} = (x_1, x_2, x_3) = (2,1,3)$ då

   $\overline{g}(\overline{x}) = (g_1(x_1,x_2,x_3), g_2(x_1,x_2,x_3)) = (-x_1 + 2x_2 + x_3, 3x_1 - x_2 - x_3)$ och

   $\overline{f}(\overline{u}) = (f_1(u_1,u_2), f_2(u_1,u_2)) = (u_1^2 \cdot u_2, u_1 + u_2 + 1)$

5. Bestäm största och minsta värde, om de finns, av funktionen

   $f(x,y,z) = x + 2y - 3z + 1$ då $(x-1)^2 + 2y^2 + z^2 \leq 12$.

6. Beräkna dubbelintegralen $\int\int_D (x-y) \cdot e^{x+y}\, dxdy$,

   där D är triangeln med hörn i $(0,0), (1,1), (0,2)$.

7. Beräkna trippelintegralen $\int\int\int_D z \cdot \sqrt{x^2+y^2+z^2} dxdydz$,

   där $D = \{(x,y,z) : x^2 + y^2 + z^2 \leq 2, x \geq 0, y \geq 0, z \leq 0\}$

1

(i) $f(x,y) = y^2 \cdot \sqrt{x}$.

$$f'_y(4,1) = \lim_{k\to 0} \frac{f(4,1+k) - f(4,1)}{k} = \lim_{k\to 0} \frac{2\cdot(1+k)^2 - 2}{k}$$

$$= 2\cdot \lim_{k\to 0} \frac{k^2+2k+1-1}{k} = 2\lim_{k\to 0}(k+2) = 2\cdot 2 = 4$$

(ii) $x\cdot f'_x - 2y f'_y = 18y$, bivillkor $f(3,y)=5$

variabelbyte $u = x^2\cdot y$, $v = y$

$$\left.\begin{array}{ll} u'_x = 2xy, & u'_y = x^2 \\ v'_x = 0, & v'_y = 1 \end{array}\right| \Rightarrow \begin{array}{l} f'_x = f'_u \cdot u'_x + f'_v \cdot v'_x = 2xy f'_u \\ f'_y = f'_u \cdot u'_y + f'_v \cdot v'_y = x^2 \cdot f'_u + f'_v \end{array}$$

Insättning i ekv:

$x\cdot 2xy\, f'_u - 2y(x^2 f'_u + f'_v) = 18y$ eller

$-2y\, f'_v = 18y$ $(y\neq 0)$ $f'_v = -9$ $(*)$

Integrera $(*)$ map v: $f = \int f'_v\, dv = -9v + c(u)$

$\Rightarrow f(x,y) = -9y + c(x^2 y)$, där $c(\cdot)$ är en var funktion

Använd bivillkoret: $f(3,y) = -9y + c(9y) = 5$

Sätt $t = 9y$. $\Rightarrow -t + c(t) = 5$ eller $c(t) = t+5$

Svar: $f(x,y) = -9y + x^2 y + 5$

2 (i) $(x(t), y(t), z(t)) = (e^t, \cos^2 t, \sin t)$, $t = \frac{\pi}{4}$

Punkten P på kurvan som svarar mot $t = \pi/4$:

$$P\left(e^{\pi/4}, \cos^2\tfrac{\pi}{4}, \sin\tfrac{\pi}{4}\right) = \left(e^{\pi/4}, \left(\tfrac{1}{\sqrt{2}}\right)^2, \tfrac{1}{\sqrt{2}}\right) = \underline{\left(e^{\pi/4}, \tfrac{1}{2}, \tfrac{1}{\sqrt{2}}\right)}.$$

En tangentvektor $\overline{v}$ till kurvan i punkten P:

$(x'(t), y'(t), z'(t)) = (e^t, -2\cos t \sin t, \cos t)$

Sätt in $t = \pi/4 \Rightarrow \left(e^{\pi/4}, -2\cdot\frac{1}{\sqrt{2}}\cdot\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}\right) =$

$= \underline{\left(e^{\pi/4}, -1, \frac{1}{\sqrt{2}}\right)} = \bar{v}$

(ii) $x = z^2 + 2y^2 \quad (x = g(y,z)) \quad y = 1, z = 2$

Tangentplant till funktionsyta:

$$x = g(1,2) + g'_y(1,2)\cdot(y-1) + g'_z(1,2)\cdot(z-2) \quad (*)$$

$g(1,2) = 2\cdot 1^2 + 2^2 = 6, \quad g'_y = 4y, \quad g'_y(1,2) = 4\cdot 1 = 4$

$g'_z = 2z, \quad g'_z(1,2) = 2\cdot 2 = 4$

Insättning i $(*)$: $\quad x = 6 + 4(y-1) + 4(z-2)$ eller

$$\underline{x - 4y - 4z + 6 = 0}$$

(iii) $f(x,y,z) = xyz^4, \quad P(-1,1,2), \quad \bar{v} = (1,-1,1)$

Obs Normera $\bar{v}$: $\bar{e} = \frac{1}{|\bar{v}|}\cdot\bar{v} = \frac{1}{\sqrt{3}}(1,-1,1)$

$$f'_{\bar{e}}(P) = \nabla f(P)\cdot\bar{e}.$$

$\nabla f = (f'_x, f'_y, f'_z) = (yz^4, xz^4, 4xyz^3)$

$\nabla f(P) = (1\cdot 2^4, -1\cdot 2^4, 4\cdot(-1)\cdot(1)\cdot 2^3) = 2^4(1,-1,-2)$

$\Rightarrow f'_{\bar{e}}(P) = 2^4(1,-1,-2)\cdot\frac{1}{\sqrt{3}}(1,-1,1) = \frac{2^4}{\sqrt{3}}(1+1+(-2)) = \underline{0}$

$$f(x,y) = x^3 + 3xy^2 - 15x - 12y + 1$$

(i) stationära punkter:

$$\nabla f = \bar{0} \iff \begin{cases} f'_x = 0 \\ f'_y = 0 \end{cases} \text{ eller } \begin{cases} 3x^2 + 3y^2 - 15 = 0 \\ 6xy - 12 = 0 \end{cases} \text{ eller}$$

$$\begin{cases} x^2 + y^2 = 5 & (1) \\ xy = 2 & (2) \end{cases} \qquad (2)\ y = \frac{2}{x} \to (1):$$

$$x^2 + \frac{4}{x^2} = 5 \quad \text{eller} \quad x^4 - 5x^2 + 4 = 0$$

$t = x^2 \geq 0$, $\quad t^2 - 5t + 4 = 0$, $\quad t_{1,2} = 1; 4$

Fall $x^2 = 1 \iff x = \pm 1 \to (2)$ om $x = 1$ så är $y = 2$

om $x = -1$ så är $y = -2$

Fall $x^2 = 4 \iff x = \pm 2 \to (2)$ om $x = 2$ så är $y = 1$

om $x = -2$ så är $y = -1$

Vi har 4 stationära punkter $P_1(1,2)$, $P_2(-1,-2)$, $P_3(2,1)$ o $P_4(-2,-1)$

(ii) Avgör punkternas karaktär!

$$f''_{xx} = (f'_x)'_x = 6x, \quad f''_{xy} = (f'_x)'_y = 6y, \quad f''_{yy} = (f'_y)'_y = 6x$$

$$Hf = \begin{bmatrix} f''_{xx} & f''_{xy} \\ f''_{xy} & f''_{yy} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 6x & 6y \\ 6y & 6x \end{bmatrix}$$

$$Hf(P_1) = \begin{bmatrix} 6 & 12 \\ 12 & 6 \end{bmatrix}, \quad \text{Sekular ekv} \quad \begin{vmatrix} (6-\lambda) & 12 \\ 12 & (6-\lambda) \end{vmatrix} = 0 \quad \text{eller}$$

$$\lambda^2 - 12\lambda - 108 = 0, \quad \lambda_1 = 18; \lambda_2 = -6, \quad \lambda_1 \cdot \lambda_2 = 18 \cdot (-6) < 0 \Rightarrow$$

P_1 är en sadelpunkt.

$$Hf(P_2) = \begin{bmatrix} -6 & -12 \\ -12 & -6 \end{bmatrix}, \quad \begin{vmatrix} (-6-\lambda) & -12 \\ -12 & (-6-\lambda) \end{vmatrix} = 0 \quad \text{eller}$$

$\lambda^2 + 12\lambda - 108 = 0$, $\lambda_1 = -18$; $\lambda_2 = 6$,

$\lambda_1 \cdot \lambda_2 < 0 \Rightarrow P_2$ är en sadelpunkt

$Hf(P_3) = \begin{bmatrix} 12 & 6 \\ 6 & 12 \end{bmatrix}$, $\begin{vmatrix} (12-\lambda) & 6 \\ 6 & (12-\lambda) \end{vmatrix} = 0$ eller

$\lambda^2 - 24\lambda + 108 = 0$, $\lambda_1 = 18$; $\lambda_2 = 6$, $\min > 0 \Rightarrow$
P_3 är en strängt lokal minimipunkt

$Hf(P_4) = \begin{bmatrix} -12 & -6 \\ -6 & -12 \end{bmatrix}$, $\begin{vmatrix} (-12-\lambda) & -6 \\ -6 & (-12-\lambda) \end{vmatrix} = 0$ eller

$\lambda^2 + 24\lambda + 108 = 0$, $\lambda_1 = -18$; $\lambda_2 = -6$, $\max < 0 \Rightarrow$

P_4 är en strängt lokal maximipunkt.

4) Bestäm $(\bar{f} \circ \bar{g})'(\bar{x})$. Obs $(\bar{f} \circ \bar{g})(\bar{x}) = \bar{f}(\bar{g}(\bar{x}))$

$\underline{o}$ $(\bar{f} \circ \bar{g})'(\bar{x}) = \bar{f}'(\bar{g}(\bar{x})) \cdot \bar{g}'(x)$

$\bar{x} = (x_1, x_2, x_3) = (2, 1, 3)$.

$\bar{g}(\bar{x}) = (g_1(x_1, x_2, x_3), g_2(x_1, x_2, x_3)) = (-x_1 + 2x_2 + x_3, 3x_1 - x_2 - x_3)$

$\bar{f}(\bar{u}) = (f_1(u_1, u_2), f_2(u_1, u_2)) = (u_1^2 \cdot u_2, \ u_1 + u_2 + 1)$

$\bar{g}(2,1,3) = (-2+2+3, \ 6-1-3) = (3, 2)$

$g'(\bar{x}) = \begin{bmatrix} -1 & 2 & 1 \\ 3 & -1 & -1 \end{bmatrix} = g'(2,1,3)$

$\bar{f}'(\bar{u}) = \begin{bmatrix} 2u_1 u_2 & u_1^2 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \Rightarrow \bar{f}'(3,2) = \begin{bmatrix} 2 \cdot 3 \cdot 2 & 3^2 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 12 & 9 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$

$(\bar{f} \circ \bar{g})'(2,1,3) = \begin{bmatrix} 12 & 9 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} -1 & 2 & 1 \\ 3 & -1 & -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 15 & 15 & 3 \\ 2 & 1 & 0 \end{bmatrix}$

(5) $f(x,y,z) = x + 2y - 3z + 1$ då $(x-1)^2 + 2y^2 + z^2 \leq 12$ (5)
(K)

Obs 1) f är kontinuerlig
2) K är kompakt $\Rightarrow$ f har max/min på K

(K avgränses av ellipsoiden $(x-1)^2 + 2y^2 + z^2 = 12$)

(i) Inre stationära punkter: $\left(\underbrace{(x-1)^2 + 2y^2 + z^2 < 12}_{\text{det inre}} \right)$

$\nabla f = \bar{0} \Leftrightarrow (1, 2, -3) = \bar{0}$ inga lsg:ar $\Rightarrow$ inga stationära punkter

(ii) inför $g(x,y,z) = (x-1)^2 + 2y^2 + z^2$

Studera randen till K: $g = 12$ (ellipsoiden)

Kandidatpunkter är lsg:ar till systemet:

$$\begin{cases} \nabla f, \nabla g \text{ är lin. beroende} \\ g = 12 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \nabla f \times \nabla g = \bar{0} & (*) \\ g = 12 \end{cases}$$

$\nabla g = (2(x-1), 4y, 2z)$

$$\nabla f \times \nabla g = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -3 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 2(x-1) \\ 4y \\ 2z \end{pmatrix} = (4z + 12y, -(2z + 6(x-1)), 4y - 4(x-1))$$

$$(*) \Leftrightarrow \begin{cases} 3y + z = 0 \\ 3(x-1) + z = 0 & \Rightarrow z = -3(x-1) \\ (x-1) - y = 0 & \Rightarrow y = x-1 \\ (x-1)^2 + 2y^2 + z^2 = 12 & \text{Insättning} \\ (x-1)^2 + 2(x-1)^2 + 9(x-1)^2 = 12 \Leftrightarrow (x-1)^2 = 1 \Leftrightarrow x = 0; 2 \end{cases}$$

Om $x = 0$ så är $y = -1$; $z = 3$; Om $x = 2$ så är $y = 1$; $z = -3$

Vi har två kandidatpunkter:

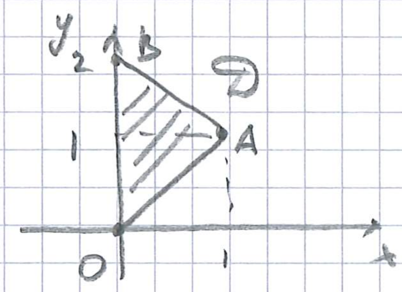
$P_1(0,-1,3)$ o $P_2(2,1,-3)$

$$f(P_1) = 0 + 2(-1) - 3\cdot 3 + 1 = -10 = \min_K f$$

$$f(P_2) = 2 + 2\cdot 1 - 3\cdot(-3) + 1 = 14 = \max_K f$$

(6) $$I = \iint_D (x-y)e^{x+y}\,dx\,dy$$

D är triangeln med hörn i $(0,0)$, $(1,1)$, $(0,2)$



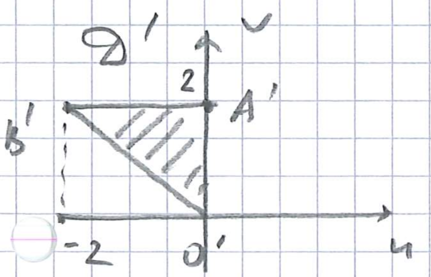
Variabelbyte: $\begin{cases} u = x-y \\ v = x+y \end{cases}$

$$\frac{d(u,v)}{d(x,y)} = \begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = 2 \;\Downarrow\; \frac{d(x,y)}{d(u,v)} = \frac{1}{2}$$

A': $(1-1,\ 1+1) = (0,2)$

O': $(0-0,\ 0+0) = (0,0)$

B': $(0-2,\ 0+2) = (-2,2)$



$$I = \iint_{D'} u\cdot e^v \cdot \underbrace{\frac{d(x,y)}{d(u,v)}}_{=\frac{1}{2}}\,du\,dv =$$

$$= \frac{1}{2}\int_{-2}^{0}\left(\int_{-u}^{2} u e^v\,dv\right)du = \frac{1}{2}\int_{-2}^{0} u\,e^v\Big|_{-u}^{2}\,du =$$

$$= \frac{1}{2}\int_{-2}^{0} u(e^2 - e^{-u})\,du = \underbrace{\frac{1}{2}\int_{-2}^{0} u e^2\,du}_{=\frac{e^2}{2}\cdot\frac{u^2}{2}\Big|_{-2}^{0} = -e^2} - \frac{1}{2}\underbrace{\int_{-2}^{0} u e^{-u}\,du}_{I_1}$$

$$I_1 = \left(-u e^{-u} - e^{-u}\right)\Big|_{-2}^{0} = -1 + (-2e^2 + e^2) = -1 - e^2$$

$$\Rightarrow I = -e^2 + \frac{1}{2} + \frac{e^2}{2} = \frac{1-e^2}{2}$$

7

$$I = \iiint z \cdot \sqrt{x^2+y^2+z^2}\, dx\,dy\,dz \text{, där}$$

$$D = \{ x^2+y^2+z^2 \le 2,\ x \ge 0,\ y \ge 0,\ z \le 0 \}.$$

$$\begin{cases} x = r\sin\theta\cos\varphi \\ y = r\sin\theta\sin\varphi \\ z = r\cos\theta \end{cases}$$

<u>variabel byte</u>

$$x^2+y^2+z^2 = r^2$$

$$\frac{d(x\,y\,z)}{d(r\,\theta\,\varphi)} = r^2\sin\theta$$

$$D: 0 \le r \le \sqrt{2},\ \frac{\pi}{2} \le \theta \le \pi,\ 0 \le \varphi \le \pi/2$$

$$\Rightarrow I = \int_0^{\sqrt{2}} \left(\int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} \left(\int_0^{\pi/2} r\cos\theta \cdot r \cdot r^2 \sin\theta \, d\varphi \right) d\theta \right) dr =$$

$$= \underbrace{\int_0^{\sqrt{2}} r^4\,dr}_{\left.\frac{r^5}{5}\right|_0^{\sqrt{2}} = \frac{4}{5}\sqrt{2}} \cdot \underbrace{\int_{\pi/2}^{\pi} \cos\theta \cdot \sin\theta\, d\theta}_{\left.\frac{\sin^2\theta}{2}\right|_{\pi/2}^{\pi} = -\frac{1}{2}} \cdot \underbrace{\int_0^{\pi/2} d\varphi}_{\frac{\pi}{2}}$$

$$\Rightarrow I = \frac{4}{5}\sqrt{2} \cdot \left(-\frac{1}{2}\right) \cdot \frac{\pi}{2} = -\frac{\pi\sqrt{2}}{5}$$