

TENTAMEN I TATA83 (FLERVARIABELANALYS)
2025-06-12 KL 14-19

Inga hjälpmedel tillåtna. Uppgifterna bedöms med 0-3 poäng.
Betygsgränser: 8/11/14 poäng ger betyg 3/4/5.

1. (i) Finn $z \in C^2$ sådana att $z''_{yx} = 1$ och $z'_y(0, y) = e^y$. (1p)
(ii) Transformera z''_{yx} till de nya variablerna $u = x + y, v = xy$ om $z \in C^2$. (2p)
2. Betrakta ytan $x^2 + 2y^2 + 3z^2 + 2xy + 2yz = 1$ i rummet R^3 .
(i) Bestäm en ekvation för tangentplanet till ytan i punkten $M(1, -1, 0)$. (1p)
(ii) Bestäm alla punkter på ytan i vilka ytans tangentplan är parallella med planet $x - y + 2z = 0$. (2p)
3. Låt $f(x, y) = \frac{2}{3}x^3 - x^2 - 2y^2 + 4xy + 2$.
(i) Vilka av punkterna $P_1(-1, -1), P_2(0, 0), P_3(1, 1)$ är stationära för f ? (1p)
(ii) Avgör karaktär av de funna stationära punkterna. (2p)
4. Bestäm funktionalmatrisen $(\bar{f} \circ \bar{g})'(\bar{x})$ för funktionen $(\bar{f} \circ \bar{g})(\bar{x}) = \bar{f}(\bar{g}(\bar{x}))$ i punkten $\bar{x} = (x_1, x_2, x_3) = (2, -1, 1)$ då
 $\bar{g}(\bar{x}) = (g_1(x_1, x_2, x_3), g_2(x_1, x_2, x_3)) = (x_1 \cdot x_2 \cdot x_3, 3x_1 + x_2 - 2x_3)$ och
 $\bar{f}(\bar{u}) = (f_1(u_1, u_2), f_2(u_1, u_2)) = (u_1^2 \cdot u_2^2, u_1 \cdot u_2 + 1)$
5. Bestäm största och minsta värde, om de finns, av funktionen
 $f(x, y) = x^3y$ på kurvan $3x^4 + y^4 = 4$ samt motsvarande extrempunkter.
6. Beräkna dubbelintegralen $\int_0^1 (\int_x^1 \cos(y^2) dy) dx$.
7. Beräkna trippelintegralen $\int \int \int_D x dx dy dz$,
där $D = \{(x, y, z) : x^2 + y^2 + z^2 \leq 2, 0 \leq x \leq y\}$

①

① (i) Obs $z''_{yx} = (z'_y)'_x$

$$\Rightarrow z'_y = \int z''_{yx} dx = \int 1 dx = x + c(y),$$

Vidare $z'_j(0, y) = 0 + c(y) = e^y \Rightarrow c(y) = e^y$

$$\Rightarrow z = \int z'_y dy = \int (x + e^y) dy = \underline{x \cdot y + e^y + d(x) \in \mathbb{R}}.$$

(ii) Notera att

$$\begin{cases} z'_x = z'_u \cdot u'_x + z'_v \cdot v'_x, \\ z'_y = z'_u \cdot u'_y + z'_v \cdot v'_y, \end{cases} \begin{cases} u'_x = 1, u'_y = 1 \\ v'_x = y, v'_y = x \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} z'_x = z'_u \cdot 1 + z'_v \cdot y = z'_u + y \cdot z'_v & (1) \\ z'_y = z'_u \cdot 1 + z'_v \cdot x = z'_u + x \cdot z'_v & (2) \end{cases}$$

Obs $z''_{yx} = (z'_y)'_x \stackrel{(2)}{=} (z'_u + x \cdot z'_v)'_x =$

$$= (z'_u)'_x + (x \cdot z'_v)'_x = \underbrace{(z'_u)'_x}_1 + 1 \cdot z'_v + x \cdot \underbrace{(z'_v)'_x}_1$$

$$(1) \Rightarrow (\cdot)'_x = (\cdot)'_u + y \cdot (\cdot)'_v \quad (3) \text{ (en operator)}$$

Använd (3): sätt in $z'_u = z'_v$ i (3)

$$(z'_u)'_x = (z'_u)'_u + y \cdot (z'_u)'_v = z''_{uu} + y \cdot z''_{uv}$$

$$(z'_v)'_x = (z'_v)'_u + y \cdot (z'_v)'_v = z''_{vu} + y \cdot z''_{vv}$$

$$\Rightarrow z''_{yx} = \left(z''_{44} + y \cdot z''_{4v} \right) + z'_v + x \cdot \left(z''_{v4} + y \cdot z''_{vv} \right) \quad (2)$$

$$= z''_{44} + (x+y) \cdot z''_{4v} + (x \cdot y) \cdot z''_{vv} + z'_v =$$

$$= z''_{44} + 4 \cdot z''_{4v} + v \cdot z''_{vv} + z'_v$$

(2) Für $f(x,y,z) = x^2 + 2y^2 + 3z^2 + 2xy + 2yz$

(i) Kontroll $f(1, -1, 0) = 1 + 2 + 0 - 2 + 0 = 1$

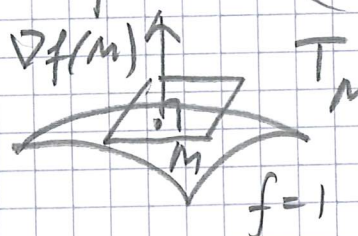
$\Rightarrow$ Punkten $M(1, -1, 0)$ hat die $f=1$.

$$\nabla f = (2x + 2y, 4y + 2x + 2z, 6z + 2y)$$

$$\nabla f(M) = (2-2, -4+2+0, 0-2) = (0, -2, -2)$$

$\nabla f(M) \perp T_M$ (tangent plane)

Obs $\nabla f(M) \perp T_M$ (tangent plane)

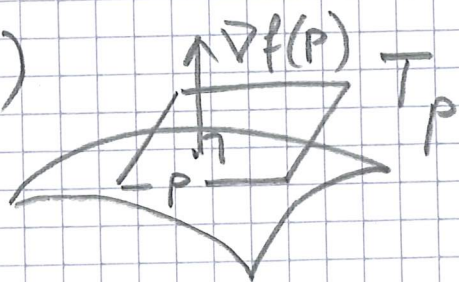


$$\Rightarrow T_M: 0 \cdot x + (-2) \cdot y + (-2) \cdot z + D = 0 \quad (1)$$

$S \cap M$ in M : (1): $0 \cdot 1 + (-2) \cdot (-1) + (-2) \cdot 0 + D = 0$

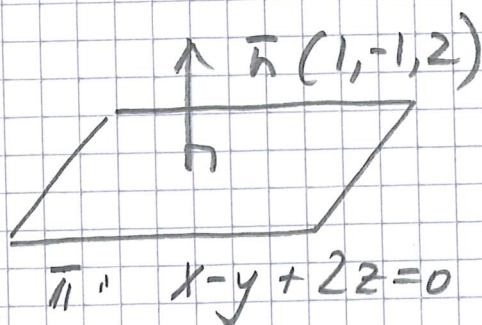
$$\Rightarrow D = -2 \Rightarrow T_M: -2y - 2z - 2 = 0 \text{ oder } \underline{y + z + 1 = 0}$$

(ii)



$\vec{n}(1, -1, 2)$

$\pi: x - y + 2z = 0$



(3)

Vi letar efter punkter $P(a,b,c)$ på ytan $f=1$

s.k. $T_P \parallel \pi \stackrel{\text{obs!}}{\Leftrightarrow} \nabla f(P) \parallel \bar{n}.$

$$\Rightarrow P: \begin{cases} P \text{ på ytan} \\ \nabla f(P) \parallel \bar{n} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a^2 + 2b^2 + 3c^2 + 2ab + 2bc = 1 & (1) \\ \nabla f(P) = k \cdot \bar{n} & (2) \end{cases}$$

Obs (2) $\Leftrightarrow \begin{cases} 2a + 2b = k \cdot 1 \\ 2a + 4b + 2c = -k \\ 2b + 6c = 2k \end{cases}$

Uttryck a, b, c i k .

Använd Gauss.

$$\begin{array}{c|c} a & b & c \\ \hline \begin{bmatrix} 2 & 2 & 0 & | & k \\ 2 & 4 & 2 & | & -k \\ 0 & 2 & 6 & | & 2k \end{bmatrix} & \sim & \begin{bmatrix} 2 & 2 & 0 & | & k \\ 0 & 2 & 2 & | & -2k \\ 0 & 2 & 6 & | & 2k \end{bmatrix} & \sim & \begin{array}{c|c} a & b & c \\ \hline \begin{bmatrix} 2 & 2 & 0 & | & k \\ 0 & 2 & 2 & | & -2k \\ 0 & 0 & 4 & | & 4k \end{bmatrix} \end{array} \end{array}$$

Obs $4c = 4k \Rightarrow c = k,$

$2b + 2c = -2k$ eller $2b + 2k = -2k \Rightarrow b = -2k$

$2a + 2b = k$ eller $2a - 4k = k \Rightarrow a = \frac{5k}{2}$

Sätt in $a(k), b(k), c(k)$ i (1):

$$\left(\frac{5k}{2}\right)^2 + 2(-2k)^2 + 3k^2 + 2 \cdot \frac{5k}{2} \cdot (-2k) + 2(-2k) \cdot k = 1$$

eller $k^2 \cdot \left(\frac{25}{4} + \frac{8}{1} + \frac{3}{1} - \frac{10}{1} - \frac{4}{1} \right) = 1$ eller

$\frac{13}{4} k^2 = 1 \Leftrightarrow k = \pm \frac{2}{\sqrt{13}} \Rightarrow a(k), b(k), c(k) \text{ igen}$

$$P_1\left(\frac{5}{\sqrt{13}}, -\frac{4}{\sqrt{13}}, \frac{2}{\sqrt{13}}\right) = P_2\left(-\frac{5}{\sqrt{13}}, \frac{4}{\sqrt{13}}, -\frac{2}{\sqrt{13}}\right)$$

③(i) Repetiera att P är en stationär punkt
om $\nabla f(P) = \vec{0}$.

$$\nabla f = (f'_x, f'_y) = (2x^2 - 2x + 4y, -4y + 4x)$$

$$\text{Kontroll: } \nabla f(-1, -1) = (2 + 2 - 4, 4 - 4) = (0, 0) \\ \Rightarrow P_1(-1, -1) \text{ är stationär.}$$

$$\nabla f(0, 0) = (0, 0) \Rightarrow P_2(0, 0) \text{ är stationär}$$

$$\nabla f(1, 1) = (2 - 2 + 4, -4 + 4) = (4, 0) \neq (0, 0)$$

$$\Rightarrow P_3(1, 1) \text{ är } \underline{\text{ej}} \text{ stationär.}$$

$$(ii) f''_{xx} = 4x - 2, f''_{xy} = 4, f''_{yy} = -4$$

$$P: Q(h, k) = f''_{xx}(P)h^2 + 2f''_{xy}(P)hk + f''_{yy}(P)k^2$$

$$\underline{P_1(-1, -1):} Q_1(h, k) = (-6)h^2 + 8hk - 4k^2 = \\ = -(\underline{4k^2 - 8hk + 6h^2}) = -((2k - 2h)^2 - 4h^2 + 6h^2) \\ = -((2k - 2h)^2 + 2h^2) = -4(h - k)^2 - 2h^2$$

$$\underline{\text{Obs}} \quad 1) Q_1 \leq 0 \quad \forall (h, k)$$

$$2) \text{ ekv } Q_1 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} h - k = 0 \\ h = 0 \end{cases} \Leftrightarrow (h, k) = (0, 0) \quad (\text{en lsg})$$

$\Rightarrow Q_1$ är neg. definit $\Rightarrow P_1$ är en str. lok. max. p.

$$P_2(0, 0): Q_2(h, k) = -2h^2 + 8hk - 4k^2 =$$

$$= -(4k^2 - 8hk + 2h^2) = -((2k - 2h)^2 - 4h^2 + 2h^2) =$$

$$= -(2k-2h)^2 + 2h^2$$

(5)

Obs $Q_2(1,1) = 2 > 0$ o $Q_2(0,1) = -4 < 0$

$\Rightarrow Q_2$ är indefinit $\Rightarrow P_2$ är en sadelpunkt.

(4) Obs $(\bar{f} \circ \bar{g})'(\bar{x}) = \bar{f}'(\bar{g}(\bar{x})) \cdot \bar{g}'(\bar{x})$

$\bar{g}(\bar{x}) = (x_1 \cdot x_2 \cdot x_3, 3x_1 + x_2 - 2x_3)$ o

$\bar{f}(\bar{u}) = (u_1^2, u_2^2, u_1 \cdot u_2 + 1).$

$\bar{x} = (2, -1, 1), \bar{g}(\bar{x}) = (2 \cdot (-1) \cdot 1, 3 \cdot 2 - 1 - 2) = \underline{(-2, 3)}$

$\bar{g}'(\bar{x}) = \begin{bmatrix} (x_2 \cdot x_3) & (x_1 \cdot x_3) & (x_1 \cdot x_2) \\ 3 & 1 & -2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & 2 & -2 \\ 3 & 1 & -2 \end{bmatrix}$

$\bar{f}'(\bar{u}) = \begin{bmatrix} (2u_1 \cdot u_2^2) & (2u_1^2 \cdot u_2) \\ u_2 & u_1 \end{bmatrix}$

$\bar{f}'(\bar{g}(\bar{x})) = \begin{bmatrix} (2 \cdot (-2) \cdot 9) & (2 \cdot (-2)^2 \cdot 3) \\ 3 & -2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -36 & 24 \\ 3 & -2 \end{bmatrix}$

$(\bar{f} \circ \bar{g})'(\bar{x}) = \begin{bmatrix} -36 & 24 \\ 3 & -2 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} -1 & 2 & -2 \\ 3 & 1 & -2 \end{bmatrix} =$

$\begin{bmatrix} (36+72) & (-72+24) & (72-48) \\ (-3-6) & (6-2) & (-6+4) \end{bmatrix} = \underline{\underline{\begin{bmatrix} 108 & -48 & 24 \\ -9 & 4 & -2 \end{bmatrix}}}$

(5) $f(x,y) = x^3 \cdot y$ på kurvan $\underbrace{3x^4 + y^4}_{=: g(x,y)} = 4$

(6)

Obs 1) f är kontinuerlig på bl.a. kurvan

2) Kurvan är kompakt (sluten o begränsad)

$\Rightarrow f$ har max o min på kurvan

Kandidatpunkter satisfierar systemet:

$$\begin{cases} \nabla f, \nabla g \text{ är linjärt beroende} \\ g = 4 \end{cases} \quad (\Leftrightarrow)$$

$$\begin{cases} \begin{vmatrix} f'_x & f'_y \\ g'_x & g'_y \end{vmatrix} = 0 & (1) \\ g = 4 & (2) \end{cases}$$

Obs
$$\begin{cases} f'_x = 3x^2y \\ f'_y = x^3 \\ g'_x = 12x^3 \\ g'_y = 4y^3 \end{cases}$$

$$(1) \Leftrightarrow \begin{vmatrix} 3x^2y & x^3 \\ 12x^3 & 4y^3 \end{vmatrix} = 0 \Leftrightarrow 12x^2y^4 - 12x^6 = 0$$

eller $x^2 \cdot (y^4 - x^4) = 0 \Leftrightarrow x=0$ eller $y=x$ eller $y=-x$

Använd (2):

$$x=0, \quad y^4=4 \Leftrightarrow y = \pm \sqrt[4]{4} = \pm \sqrt{2} \Rightarrow P_1(0, \sqrt{2}), P_2(0, -\sqrt{2})$$

$$y=x, \quad 4x^4=4 \Leftrightarrow x = \pm 1 \Rightarrow P_3(1, 1), P_4(-1, -1)$$

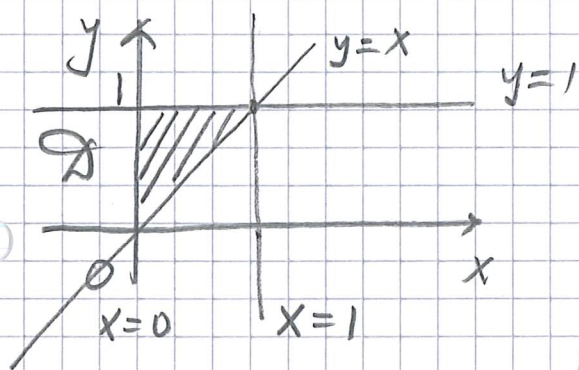
$$y = -x, \quad 4x^2 = y \Leftrightarrow x = \pm 1 \Rightarrow P_5(1, -1), P_6(-1, 1) \quad (7)$$

Kandidatvärden:

$$\left. \begin{array}{l} f(P_1) = f(P_2) = 0 \\ f(P_3) = 1 = f(P_4) \\ f(P_5) = -1 = f(P_6) \end{array} \right\} \Rightarrow \begin{array}{l} \max f = 1 \text{ antas} \\ \text{på kurvan} \quad \text{i } P_3, P_4 \\ \min f = -1 \text{ antas} \\ \text{på kurvan} \quad \text{i } P_5, P_6. \end{array}$$

⑥ $I = \int_0^1 \left(\int_x^1 \cos(y^2) dy \right) dx$ Obs det inte går att integrera direkt.

Kasta om variabler! Börja att rita området $\mathcal{D}$.



Obs $I = \iint_{\mathcal{D}} \cos(y^2) dx dy$

Vidare: $I = \int_0^1 \left(\int_0^y \cos(y^2) dx \right) dy =$

$$= \int_0^1 \cos(y^2) \left(\int_0^y 1 \cdot dx \right) dy = \int_0^1 y \cdot \cos(y^2) dy = \left| \begin{array}{l} t = y^2 \\ dt = 2y dy \end{array} \right|$$

$$= \int_{y=0}^{y=1} \frac{1}{2} \cos t dt = \frac{1}{2} \sin t \Big|_{y=0}^{y=1} = \frac{1}{2} \sin(y^2) \Big|_0^1 = \underline{\underline{\frac{1}{2} \sin 1}}$$

(9)

$$\frac{\frac{\pi}{4}}{1} \Big|_{\sqrt{2}}^{\sqrt{2}} \cdot \frac{\sin \varphi}{\left(1 - \frac{1}{\sqrt{2}}\right)} \Big|_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} \cdot \frac{1}{2} \left(\theta - \frac{1}{2} \sin 2\theta \right) \Big|_0^{\frac{\pi}{2}} =$$

$$= \frac{\frac{\pi}{2}}{2} \cdot \left(1 - \frac{1}{\sqrt{2}}\right)$$