

TENTAMEN I TATA83 (FLERVARIABELANALYS)
2025-08-20 KL 14-19

Inga hjälpmedel tillåtna. Uppgifterna bedöms med 0-3 poäng.
Betyggränser: 8/11/14 poäng ger betyg 3/4/5.

1. ✱ (i) Bestäm $\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{x^3 + \tan(x^2 + y^2)}{x^2 + y^2}$ (1p)
(ii) Transformera $(z'_x)'_y$ till de nya variablerna $u = x + y, v = xy$ om $z \in C^2$. (2p)
2. ✱ (i) Bestäm ekvationer för alla linjer som tangerar ellipsen $x^2 + xy + y^2 = 1$ och som går genom punkten $P(0, 2)$ (2p)
(ii) Bestäm en ekvation för tangentplanet till ytan $z = xy^3$ i punkten $P(-1, -2, 8)$ (1p).
3. Låt $f(x, y) = x^3 + 3xy^2 - 15x - 12y + 7$.
(i) Vilka av punkterna $P_1(2, 1), P_2(-2, 1), P_3(-2, -1), P_4(2, -1)$ är stationära för f ? (1p)
(ii) Avgör karaktär av de funna stationära punkterna. (2p)
4. Bestäm funktionalmatrisen $(\bar{f} \circ \bar{g})'(\bar{x})$ för funktionen $(\bar{f} \circ \bar{g})(\bar{x}) = \bar{f}(\bar{g}(\bar{x}))$ i punkten $\bar{x} = (x_1, x_2, x_3) = (2, -1, 1)$ då $\bar{g}(\bar{x}) = (g_1(x_1, x_2, x_3), g_2(x_1, x_2, x_3)) = (3x_1 + x_2 - 2x_3, x_1 \cdot x_2 \cdot x_3)$ och $\bar{f}(\bar{u}) = (f_1(u_1, u_2), f_2(u_1, u_2)) = (u_1 \cdot u_2 + 1, u_1^2 \cdot u_2^2)$
5. Bestäm största och minsta värde av $f(x, y) = xy^2 + 3y - x + 3$ på det område D som ges av olikheterna $0 \leq y \leq -x \leq 2$.
6. Beräkna dubbelintegralen $\int \int_D (x + 2y) \cdot \cos(2x + y) \, dx dy$, där D ges av $0 \leq 2x + y \leq 1$ och $-1 \leq x + 2y \leq 1$.
7. Finn massan av kroppen som definieras av $x^2 + y^2 + z^2 \leq 1, y \geq |x|$, med densitet $f(x, y, z) = e^{(x^2 + y^2 + z^2)^{\frac{3}{2}}}$.

① ② $G = \lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{x^3 + \tan(x^2 + y^2)}{x^2 + y^2} = \left(\frac{0}{0}\right)$

①

Uttryck!

$$U = \frac{x^3}{x^2 + y^2} + \frac{\tan(x^2 + y^2)}{x^2 + y^2} = U_1 + U_2$$

Oks (a) $|U_1| \leq \frac{r^3}{r^2} = r \rightarrow 0$ då $r \rightarrow 0$
($r = \sqrt{x^2 + y^2}$)

$\Rightarrow U_1 \rightarrow 0$ då $r \rightarrow 0$ ($\Leftrightarrow (x,y) \rightarrow (0,0)$)

(b) $z = x^2 + y^2$, $z \rightarrow 0$ då $(x,y) \rightarrow (0,0)$

$\frac{\tan z}{z} \rightarrow 1$ då $z \rightarrow 0$

$\Rightarrow \frac{\tan(x^2 + y^2)}{x^2 + y^2} \rightarrow 1$ då $(x,y) \rightarrow (0,0)$
(sammansättnings regel)

(a) & (b) $\Rightarrow U \rightarrow 0 + 1 = 1$ då $(x,y) \rightarrow (0,0)$

$\therefore$ v s $G = 1$.

(ii) $u = x + y \Rightarrow u'_x = 1, u'_y = 1$
 $v = x \cdot y \Rightarrow v'_x = y, v'_y = x$

$z'_x = z'_u \cdot u'_x + z'_v \cdot v'_x = z'_u \cdot 1 + z'_v \cdot y = z'_u + y \cdot z'_v$

$z'_y = z'_u \cdot u'_y + z'_v \cdot v'_y = z'_u \cdot 1 + z'_v \cdot x = z'_u + x \cdot z'_v$

Vidare: $(z'_x)'_y = (z'_u + y \cdot z'_v)'_y = (z'_u)'_y +$

$$(y \cdot z'_v)'_y = \underbrace{(z'_u)'_y}_{=0} + 1 \cdot z'_v + y \cdot \underbrace{(z'_v)'_y}_{=0}$$

Använd (2): $(\cdot)'_y = (\cdot)'_u + x \cdot (\cdot)'_v$. (3)

Sätt in z'_u, z'_v i (3):

$$(z'_u)'_y = (z'_u)'_u + x(z'_u)'_v = z''_{uu} + x \cdot z''_{uv},$$

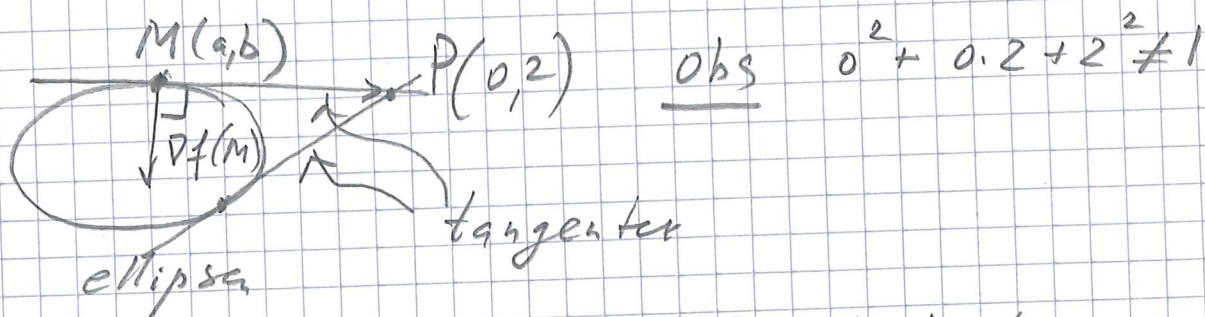
$$(z'_v)'_y = (z'_v)'_u + x \cdot (z'_v)'_v = z''_{vu} + x \cdot z''_{vv},$$

$$\Rightarrow (z'_x)'_y = \underbrace{z''_{uu} + x \cdot z''_{uv}}_{= z''_{xu}} + z'_v + y \cdot \underbrace{(z''_{vu} + x \cdot z''_{vv})}_{= z''_{yv}} =$$

$$= z''_{uu} + (x+y)z''_{uv} + x \cdot y z''_{vv} + z'_v =$$

$$\underline{z''_{uu} + 4 \cdot z''_{uv} + v z''_{vv} + z'_v}$$

(2) Rita en bild:



Inför $f(x,y) = x^2 + xy + y^2$, $\nabla f = (f'_x, f'_y) = (2x+y, x+2y)$

Repetera att $\nabla f(M) \perp$ ellipsen (tangenten i M).

Finn M s.d. $\begin{cases} M \in \text{ellipsen} \\ \nabla f(M) \perp \overline{MP} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a^2 + ab + b^2 = 1 \\ (2a+b, a+2b) \cdot (-a, 2-b) = 0 \end{cases}$

$$\begin{cases} a^2 + ab + b^2 = 1 & (1) \\ (2a+b) \cdot (-a) + (a+2b) \cdot (2-b) = 0 & (2) \end{cases}$$

$$(2): \quad \begin{array}{ccccccc} -2a^2 & -ab & +2a & -ab & +4b & -2b^2 & = 0 \quad \Leftrightarrow \\ \uparrow & \uparrow & & \uparrow & & \uparrow & \\ & & -2 & & & & \end{array} \quad \text{" (se (1))}$$

$$2a + 4b - 2 = 0 \quad \text{eller} \quad a + 2b - 1 = 0$$

$$\Rightarrow \underline{a = 1 - 2b} \quad \text{Sätt in (1):}$$

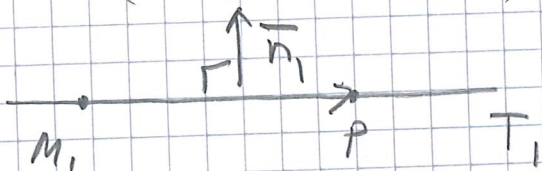
$$(1 - 2b)^2 + (1 - 2b) \cdot b + b^2 = 1 \quad \text{eller}$$

$$1 - 4b + 4b^2 + b - 2b^2 + b^2 = 1 \quad \text{eller} \quad 3b^2 - 3b = 0 \Leftrightarrow$$

$$b_1 = 0 \quad \text{eller} \quad b_2 = 1 \Rightarrow a_1 = 1, \quad a_2 = -1$$

$$M_1(1, 0), \quad M_2(-1, 1)$$

Vidare: (till ex.)

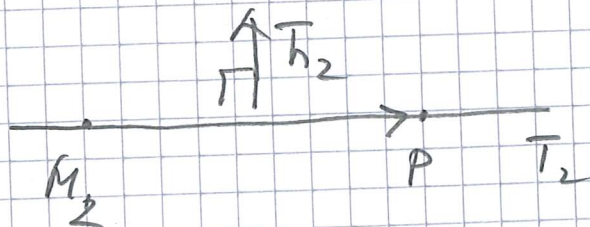


$$\overrightarrow{M_1P} = P - M_1 = (0, 2) - (1, 0) = (-1, 2)$$

$$\vec{n}_1(2, 1)$$

$$T_1: \quad 2x + y + c_1 = 0, \quad \text{Sätt in } M_1 \\ 2 \cdot 1 + 0 + c_1 = 0 \Rightarrow c_1 = -2$$

$$\Rightarrow T_1: \quad \underline{2x + y - 2 = 0}$$



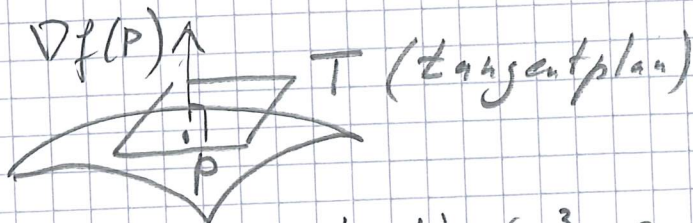
$$\overrightarrow{M_2P} = P - M_2 = (0, 2) - (-1, 1) = (1, 1)$$

$$\vec{n}_2 = (1, -1)$$

$$T_2: \quad x - y + c_2 = 0, \quad \text{Sätt in } M_2 \\ (-1) - 1 + c_2 = 0 \Rightarrow c_2 = 2$$

$$\Rightarrow T_2: \quad \underline{x - y + 2 = 0}$$

(ii) $z = xy^3$, $f(x, y, z) = xy^3 - z$.
Tan: $f = 0$. obs $P \in y^{\text{tan}}$ by
 $(-1) \cdot (-2)^3 - 8 = 0$



$$\nabla f = (f'_x, f'_y, f'_z) = (y^3, 3y^2x, -1)$$

$$\nabla f(P) = \nabla f(-1, -2, 8) = (-8, 3 \cdot 4 \cdot (-1), -1) = (-8, -12, -1)$$

$$T: (-8) \cdot (x - (-1)) - 12 \cdot (y - (-2)) - 1 \cdot (z - 8) = 0 \text{ eller}$$

$$-8(x+1) - 12(y+2) - (z-8) = 0 \text{ eller}$$

$$-8x - 12y - z - 24 = 0 \text{ eller } \underline{8x + 12y + z + 24 = 0}$$

③ $f(x, y) = x^3 + 3xy^2 - 15x - 12y + 7$

(i) $\nabla f = (3x^2 + 3y^2 - 15, 6xy - 12) = (f'_x, f'_y)$

$$\nabla f(2, 1) = (3 \cdot 4 + 3 \cdot 1 - 15, 6 \cdot 2 \cdot 1 - 12) = (0, 0) \Rightarrow$$

P_1 är stationär.

$$\nabla f(-2, 1) = (3 \cdot 4 + 3 \cdot 1 - 15, 6 \cdot (-2) \cdot 1 - 12) = (0, -24) \neq (0, 0) \Rightarrow$$

P_2 är ej stationär

$$\nabla f(-2, -1) = (0, 0) \Rightarrow P_3 \text{ är stationär.}$$

$$\nabla f(2, -1) = (0, -24) \neq (0, 0) \Rightarrow P_4 \text{ är ej stationär.}$$

(ii) $P: Q(h, k) = f''_{xx}(P)h^2 + 2f''_{xy}(P)hk + f''_{yy}(P)k^2$

$$f''_{xx} = 6x, \quad f''_{xy} = 6y, \quad f''_{yy} = 6x$$

$$P_1: 12h^2 + 2 \cdot 6hk + 12k^2 = 12(h^2 + hk + k^2) =$$

$$= 12\left(\left(h + \frac{k}{2}\right)^2 - \frac{k^2}{4} + k^2\right) = 12\left(\left(h + \frac{k}{2}\right)^2 + \frac{3}{4}k^2\right), \text{ pos. def.}$$

$\Rightarrow P_1$ är en str. lok. min. punkt

(5)

$$P_3: -12h^2 - 12hk - 12k^2 = -12\left(\left(h + \frac{k}{2}\right)^2 + \frac{3}{4}k^2\right), \text{neg. def.}$$

$\Rightarrow P_3$ är en str. lok. max punkt.

(4) $(\bar{f} \circ \bar{g})'(\bar{x}) = ? \quad \bar{x} = (2, -1, 1)$

$$\bar{g}(\bar{x}) = (3x_1 + x_2 - 2x_3, x_1 \cdot x_2 \cdot x_3)$$

$$\bar{f}(\bar{u}) = (u_1 \cdot u_2 + 1, u_1^2 \cdot u_2^2)$$

Obs $(\bar{f} \circ \bar{g})'(\bar{x}) = \bar{f}'(\bar{g}(\bar{x})) \cdot \bar{g}'(\bar{x})$

$$\bar{g}'(\bar{x}) = \begin{bmatrix} 3 & 1 & -2 \\ (x_1, x_3) & (x_1, x_3) & (x_1, x_2) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 & 1 & -2 \\ -1 & 2 & -2 \end{bmatrix}$$

$$\bar{g}(\bar{x}) = (3 \cdot 2 + (-1) - 2 \cdot 1, 2 \cdot (-1) \cdot 1) = (3, -2)$$

$$\bar{f}'(\bar{u}) = \begin{bmatrix} u_2 & u_1 \\ 2u_1 \cdot u_2^2 & 2u_1^2 \cdot u_2 \end{bmatrix} \Rightarrow$$

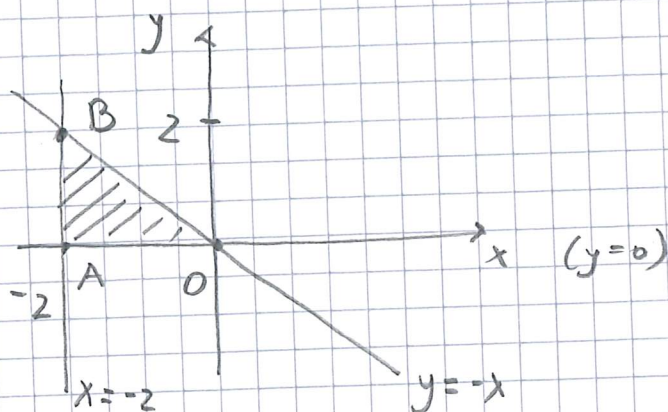
$$\bar{f}'(\bar{g}(\bar{x})) = \bar{f}'(3, -2) = \begin{bmatrix} -2 & 3 \\ (2 \cdot 3 \cdot (-2)^2) & (2 \cdot 3^2 \cdot (-2)) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2 & 3 \\ 24 & -36 \end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow (\bar{f} \circ \bar{g})'(\bar{x}) = \begin{bmatrix} -2 & 3 \\ 24 & -36 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 3 & 1 & -2 \\ -1 & 2 & -2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -9 & 4 & -2 \\ 108 & -48 & 24 \end{bmatrix}$$

(5) $f(x, y) = xy^2 + 3y - x + 3$

Sök max/min av f på $D = \{0 \leq y \leq -x \leq 2\}$

(6)

Ritz D:

Obs 1) D är kompakt
 2) f är kontinuerlig $\Rightarrow f$ har max/min på D.

① Inre stationära punkter:

$$\nabla f = (f'_x, f'_y) = (y^2 - 1, 2xy + 3)$$

$$\nabla f = \vec{0} \Leftrightarrow \begin{cases} y^2 - 1 = 0 \\ 2xy + 3 = 0 \end{cases} \quad \begin{array}{l} y = -1, x = 3/2 \text{ kastas bort} \\ y = 1, x = -3/2 \text{ ligger i Int} D \end{array}$$

$$P_1(-3/2, 1) \text{ är kandidat, } f(P_1) = -3/2 + 3 + 3/2 + 3 = 6$$

(kandidat värde)

② Randen till D: $OA \cup AB \cup OB$.

$$OA: \begin{cases} x = t \\ y = 0, t \in [-2, 0] \end{cases} \quad f|_{OA} = f(t, 0) = -t + 3, t \in [-2, 0]$$

$$\Rightarrow \text{Kandidat värden: } f(O) = 3, f(A) = 5$$

$$AB: \begin{cases} x = -2 \\ y = t, t \in [0, 2] \end{cases} \quad f|_{AB} = f(-2, t) = -2t^2 + 3t + 5 = g(t), t \in [0, 2]$$

$$\text{Vi dare: } g'(t) = -4t + 3 = 0 \Leftrightarrow t = 3/4 \in (0, 2) !$$

$$\text{Kandidatvärden: } f(B) = 3 \leq f(-2, 3/4) = \frac{49}{8}$$

(7)

OB: $\begin{cases} x = t \\ y = -t, t \in [-2, 0] \end{cases}$ $f|_{OB} = f(t, -t) =$
 $= t^3 - 3t - t + 3 = t^3 - 4t + 3, t \in [-2, 0]$
 $h(t)$

Vidare: $h'(t) = 3t^2 - 4 = 0 \Leftrightarrow t = \pm \frac{2}{\sqrt{3}}$

Obs att bara $-\frac{2}{\sqrt{3}} \in (-2, 0)$.

Kandidatvärdet: $f\left(-\frac{2}{\sqrt{3}}, \frac{2}{\sqrt{3}}\right) = \frac{16}{3\sqrt{3}} + 3$.

Sammenfatting: alla kandidatvärden:

$6, 3, 5, \frac{49}{8}, \frac{16}{3\sqrt{3}} + 3$

$\left[\begin{array}{l} \min f = 3 \text{ antas i punkterna } O \text{ och } B, \\ \max f = \frac{49}{8} \text{ antas i punkten } (-2, \frac{3}{4}). \\ \text{(ty } \frac{49}{8} \times \frac{16}{3\sqrt{3}} + 3 \Leftrightarrow \frac{25}{8} \wedge \frac{16}{3\sqrt{3}} \Leftrightarrow \frac{625}{64} \wedge \frac{256}{27} \end{array} \right)$

(6) Beräkna $I = \iint_D (x+2y) \cdot \cos(2x+y) dx dy$

där $D = \{0 \leq 2x+y \leq 1, -1 \leq x+2y \leq 1\}$.

Inför nya variabler: $\begin{cases} u = x+2y \\ v = 2x+y \end{cases}$

Obs 1) $\frac{d(x,y)}{d(u,v)} = \frac{1}{\frac{d(u,v)}{d(x,y)}} = \frac{1}{\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{vmatrix}} = \frac{1}{1-4} = -\frac{1}{3}$

$\Rightarrow \left| \frac{d(x,y)}{d(u,v)} \right| = \left| -\frac{1}{3} \right| = \frac{1}{3}$

2) $D_{uv} = \{0 \leq v \leq 1, -1 \leq u \leq 1\}$.

$$\Rightarrow I = \iint_{D_{uv}} u \cdot \cos v \cdot \frac{1}{3} du dv = \frac{1}{3} \int_{-1}^1 \left(\int_0^1 u \cos v dv \right) du =$$

$$= \frac{1}{3} \int_{-1}^1 u du \cdot \int_0^1 \cos v dv = \frac{1}{3} \cdot 0 \cdot \sin 1 = \underline{0}$$

$$\sin v \Big|_0^1 = \sin 1 - \sin(0) = \underline{\sin 1}$$

(7) $M = \iiint_{\Omega} f(x,y,z) dx dy dz$, für

$$f(x,y,z) = e^{(x^2+y^2+z^2)^{3/2}}, \quad \Omega = \{x^2+y^2+z^2 \leq 1, y \geq |x|\}$$

Anwendung sphärische Koordinaten:

$$\begin{cases} x = r \sin \theta \cos \varphi \\ y = r \sin \theta \sin \varphi \\ z = r \cos \theta \end{cases}$$

$\frac{3\pi}{4}$

$y = |x|$

$\Rightarrow \Omega_{r\varphi\theta} = \begin{cases} 0 \leq r \leq 1 \\ \frac{\pi}{4} \leq \varphi \leq \frac{3\pi}{4} \\ 0 \leq \theta \leq \pi \end{cases}$

OKS $\left| \frac{d(x,y,z)}{d(r,\theta,\varphi)} \right| = r^2 \sin \theta$

$x^2 + y^2 + z^2 = r^2$

$$f(x(r,\varphi,\theta), y(r,\varphi,\theta), z(r,\varphi,\theta)) = e^{r^3}$$

$$\Rightarrow M = \int_0^1 \left(\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{3\pi}{4}} \left(\int_0^\pi e^{r^3} \cdot r^2 \cdot \sin \theta d\theta \right) d\varphi \right) dr =$$

$$= \int_0^1 e^{r^3} \cdot r^2 dr \cdot \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{3\pi}{4}} d\varphi \cdot \int_0^\pi \sin \theta d\theta = \frac{1}{3} (e^1 - 1) \cdot \frac{\pi}{2} \cdot 2 =$$

$$\underline{\underline{\frac{\pi}{3} (e-1)}}$$