

Lösningsförslag TATB01 2021-09-06 14-17

1. (a) Vi kvadratkompletterar uttrycket och finner att

$$\begin{aligned} p(t) &= 5t^2 - 8t + 6 = 5 \left(t^2 - \frac{8t}{5} + \frac{6}{5} \right) = 5 \left(\left(t - \frac{4}{5} \right)^2 - \frac{16}{25} + \frac{6}{5} \right) \\ &= 5 \underbrace{\left(t - \frac{4}{5} \right)^2}_{\geq 0} + \frac{14}{5} \end{aligned}$$

så minimum inträffar då $t = 4/5$ och minsta värdet är $14/5$.

- (b) Låt $z = x + iy$, $x, y \in \mathbf{R}$. Då gäller att

$$\begin{aligned} i &= (1 + 2i)z + \frac{\bar{z}}{1 + i} = (1 + 2i)(x + iy) + \frac{x - iy}{1 + i} \\ &= x - 2y + i(y + 2x) + \frac{(x - iy)(1 - i)}{2} = x - 2y + i(y + 2x) + \frac{x - y - i(x + y)}{2} \\ &= \frac{3x - 5y}{2} + i\frac{3x + y}{2}, \end{aligned}$$

så likhet gäller om och endast om

$$3x - 5y = 0 \text{ och } 3x + y = 2.$$

Alltså måste

$$3x = 5y \quad \text{och} \quad 6y = 2 \quad \Leftrightarrow \quad y = \frac{1}{3} \quad \text{och} \quad x = \frac{5}{9},$$

$$\text{så } z = \frac{5}{9} + \frac{i}{3}.$$

- (c) Summan är aritmetisk och har $204 - 5 + 1 = 200$ termer. Den första termen ser vi är $3 - 4 \cdot 5 = -17$ och sista termen är $3 - 4 \cdot 204 = -813$, så summan blir

$$\sum_{k=5}^{204} (3 - 4k) = \frac{-17 - 813}{2} \cdot 200 = -830 \cdot 100 = -83000.$$

Svar: (a) Minsta värdet är $\frac{14}{5}$ (b) $z = \frac{5}{9} + i\frac{1}{3}$ (c) -83000 .

2. Linjens ekvation kan skrivas $y = kx + m$ för konstanter k och m . Om linjen ska gå genom $(-3, -5)$ och $(4, 9)$ så måste

$$\begin{cases} -5 = k \cdot (-3) + m, \\ 9 = k \cdot 4 + m. \end{cases}$$

Genom att subtrahera dessa två ekvationer ser vi att $-5 - 9 = -7k$, så $k = 2$, vilket i sin tur ger att $m = 1$. Linjens ekvation är således $y = 2x + 1$. Cirkelns ekvation ges av

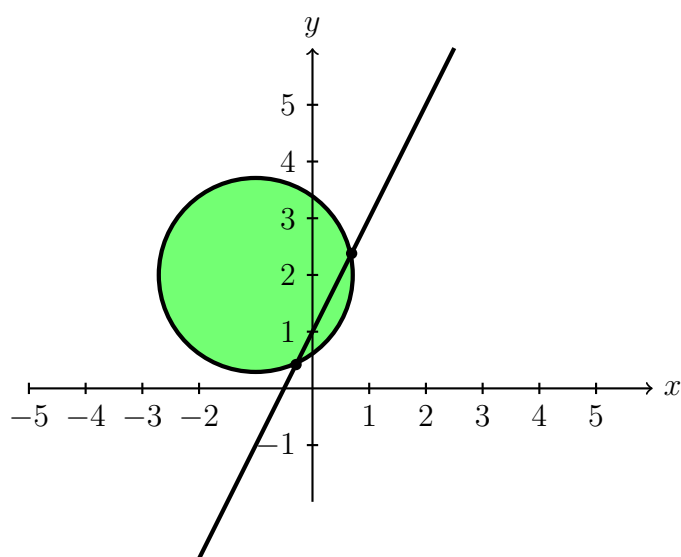
$$(x + 1)^2 + (y - 2)^2 = 3$$

och vid skärningspunkter mellan linje och cirkel måste båda ekvationerna vara uppfyllda, så

$$\begin{aligned}(x+1)^2 + (2x-1)^2 &= 3 &\Leftrightarrow & x^2 + 2x + 1 + 4x^2 - 4x + 1 = 3 \\&&\Leftrightarrow & 5x^2 - 2x - 1 = 0 &\Leftrightarrow & x^2 - \frac{2x}{5} - \frac{1}{5} = 0 \\&&\Leftrightarrow & \left(x - \frac{1}{5}\right)^2 - \frac{6}{25} = 0 &\Leftrightarrow & x = \frac{1 \pm \sqrt{6}}{5}.\end{aligned}$$

Så skärningspunkterna blir därmed

$$\left(\frac{1+\sqrt{6}}{5}, \frac{7+2\sqrt{6}}{5}\right) \quad \text{och} \quad \left(\frac{1-\sqrt{6}}{5}, \frac{7-2\sqrt{6}}{5}\right)$$



Svar:

$$\left(\frac{1+\sqrt{6}}{5}, \frac{7+2\sqrt{6}}{5}\right) \quad \text{och} \quad \left(\frac{1-\sqrt{6}}{5}, \frac{7-2\sqrt{6}}{5}\right).$$

3. Beloppet definieras enligt

$$|3-x| = \begin{cases} 3-x, & x \leq 3, \\ x-3, & x \geq 3. \end{cases}$$

Intressanta punkter är alltså bara $x = 3$. Vi delar upp i två fall.

Fall 1: $x \leq 3$. Då är

$$\begin{aligned}4|3-x| + 33 &= x^2 &\Leftrightarrow & 4(3-x) + 33 = x^2 &\Leftrightarrow & x^2 + 4x - 45 = 0 \\&&\Leftrightarrow & (x+2)^2 = 49 &\Leftrightarrow & x+2 = \pm 7 &\Leftrightarrow & x = -2 \pm 7.\end{aligned}$$

Här ser vi att endast $x = -2 - 7 = -9$ uppfyller att $x \leq 3$.

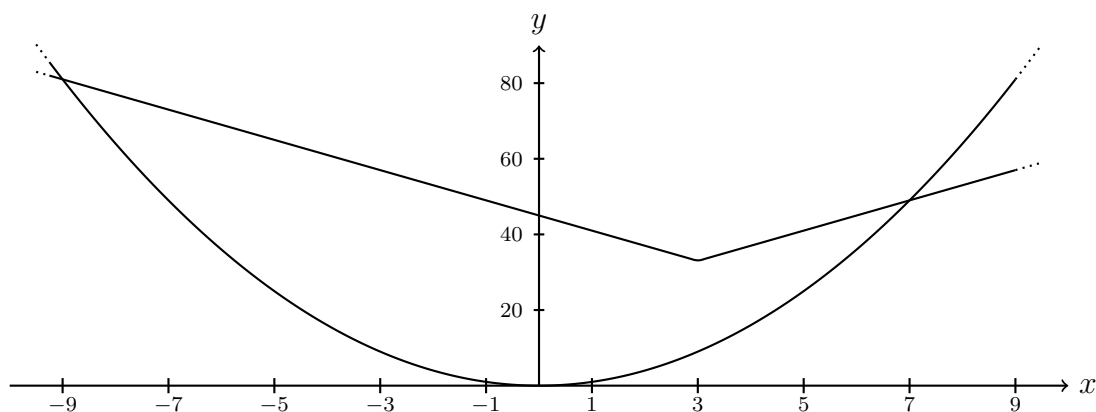
Fall 2: $x \geq 3$. Då är

$$\begin{aligned}4|3-x| + 33 &= x^2 &\Leftrightarrow & 4(x-3) + 33 = x^2 &\Leftrightarrow & x^2 - 4x - 21 = 0 \\&&\Leftrightarrow & (x-2)^2 = 25 &\Leftrightarrow & x-2 = \pm 5 &\Leftrightarrow & x = 2 \pm 5.\end{aligned}$$

Här ser vi att endast $x = 2 + 5 = 7$ uppfyller att $x \geq 3$.

Svar: $x = -9$ och $x = 7$.

Man kan även skissa vänster- och högerled i en graf för att se om svaret verkar rimligt.



4. Först skriver vi om olikheten för att få något som är enklare att studera:

$$\begin{aligned}\frac{1}{x^2 - 1} \leq \frac{x}{x + 4} &\Leftrightarrow 0 \leq \frac{x}{x + 4} - \frac{1}{x^2 - 1} = \frac{x^3 - 2x - 4}{(x + 4)(x^2 - 1)} \\ &\Leftrightarrow 0 \leq \frac{(x - 2)(x^2 + 2x + 2)}{(x + 4)(x + 1)(x - 1)},\end{aligned}$$

där vi faktorerade täljaren genom att gissa roten $x = 2$ och utföra en polynomdivision som resulterar i $x^3 - 2x - 4 = (x - 2)(x^2 + 2x + 2)$. Vi kvadratkompletterar uttrycket i den andra parentesen och finner att

$$x^2 + 2x + 2 = (x + 1)^2 + 1 > 0$$

så vi kan dela bort denna faktor med ekvivalens. Vi vill därmed studera den ekvivalenta olikheten

$$0 \leq \frac{x - 2}{(x + 4)(x + 1)(x - 1)}.$$

Vi gör ett teckenschema för det funna bråket ovan.

	-4	-1	1	2
$x + 4$	-	0	+	+
$x + 1$	-	-	0	+
$x - 1$	-	-	-	0
$x - 2$	-	-	-	-
$\frac{x - 2}{(x + 4)(x + 1)(x - 1)}$	+	☠	-	☠

Vi ser ur tabellen att uttrycket är icke-negativt precis då $x < -4$ eller $|x| < 1$ eller $x \geq 2$.

Svar: $x < -4$ eller $-1 < x < 1$ eller $x \geq 2$.

5. Vi noterar att den inre summan kan skrivas

$$\begin{aligned}\sum_{k=0}^m \binom{m+1}{k} \frac{(-1)^k}{2^k} &= \sum_{k=0}^m \binom{m+1}{k} \left(-\frac{1}{2}\right)^k \\ &= -\binom{m+1}{m+1} \left(-\frac{1}{2}\right)^{m+1} + \sum_{k=0}^{m+1} \binom{m+1}{k} 1^{m+1-k} \left(-\frac{1}{2}\right)^k \\ &= -\left(-\frac{1}{2}\right)^{m+1} + \left(1 - \frac{1}{2}\right)^{m+1} = -\left(-\frac{1}{2}\right)^{m+1} + \left(\frac{1}{2}\right)^{m+1}\end{aligned}$$

där vi adderade en term till summan för att kunna använda binomialsatsen:

$$(1+x)^{m+1} = \sum_{k=0}^{m+1} \binom{m+1}{k} 1^{m+1-k} x^k.$$

Summan som efterfrågas i uppgiften kan alltså uttryckas som två geometriska summor:

$$\sum_{m=0}^{2n-1} \left(\sum_{k=0}^m \binom{m+1}{k} \frac{(-1)^k}{2^k} \right) = - \sum_{m=0}^{2n-1} \left(-\frac{1}{2} \right)^{m+1} + \sum_{m=0}^{2n-1} \left(\frac{1}{2} \right)^{m+1}.$$

Båda summorna har $2n$ termer, men den första summan har $-1/2$ som första term och kvot medan den andra har $1/2$ som första term och kvot. Därmed blir

$$- \sum_{m=0}^{2n-1} \left(-\frac{1}{2} \right)^{m+1} = \frac{1}{2} \cdot \frac{1 - \left(-\frac{1}{2} \right)^{2n}}{1 + \frac{1}{2}} = \frac{1}{3} \cdot \left(1 - \left(\frac{1}{2} \right)^{2n} \right)$$

och

$$\sum_{m=0}^{2n-1} \left(\frac{1}{2} \right)^{m+1} = \frac{1}{2} \cdot \frac{1 - \left(\frac{1}{2} \right)^{2n}}{1 - \frac{1}{2}} = \left(1 - \left(\frac{1}{2} \right)^{2n} \right),$$

så den i uppgiften efterfrågade summan kan förenklas till

$$\sum_{m=0}^{2n-1} \left(\sum_{k=0}^m \binom{m+1}{k} \frac{(-1)^k}{2^k} \right) = \frac{4}{3} \left(1 - \left(\frac{1}{2} \right)^{2n} \right).$$

Svar: $\frac{4}{3} \left(1 - \frac{1}{4^n} \right).$