Lösningsförslag TATB01 2022-09-05 8-11

1. (a) Summan är aritmetisk och har $197-(-2)+1=200$ termer. Den första termen ser vi är $2-5\cdot(-2)=12$ och sista termen är $2-5\cdot 197=2+15-5\cdot 200=-983$, så summan blir

$$\sum_{k=-2}^{197}(2-5k)=\frac{12-983}{2}\cdot 200=-971\cdot 100=-97100.$$

(b) Eftersom

$$\frac{1-2i}{1+2i}+1+2i=\frac{(1-2i)(1-2i)}{1+4}+1+2i=\frac{-3-4i}{5}+1+2i=\frac{2}{5}+\frac{6}{5}i,$$

så blir

$$\left|\frac{1-2i}{1+2i}+1+2i\right|=\sqrt{\frac{4+36}{25}}=\frac{\sqrt{40}}{5}=\frac{2\sqrt{10}}{5}.$$

(c) Vi utför en polynomdivision.

$$\begin{array}{rrrrrrrr|l}
 & & & & x & + & 3 & & \\
\hline
 & x^3 & + & 3x^2 & + & 2x & + & 8 & x^2+2 \\
- & (x^3 & & & + & 2x) & & & \\
\hline
 & & & 3x^2 & & & + & 8 & \\
 & & - & (3x^2 & & & + & 6) & \\
\hline
 & & & & & & & 2 &
\end{array}$$

Polynomdivisionen visar att

$$x^3+3x^2+2x+8=(x^2+2)(x+3)+2,$$

så $p(x)=x+3$ och $a=2$.

Svar: (a) -97100 (b) $\dfrac{2\sqrt{10}}{5}$ (c) $p(x)=x+3$ och $a=2$.

2. Beloppen definieras enligt

$$|2x-1|=\begin{cases}2x-1, & x\geq 1/2,\\ 1-2x, & x\leq 1/2,\end{cases}\qquad \text{och} \qquad |x-1|=\begin{cases}x-1, & x\geq 1,\\ 1-x, & x\leq 1.\end{cases}$$

Intressanta punkter är alltså $x=1/2$ och $x=1$. Vi delar upp i tre fall.

Fall 1: $x\leq 1/2$. Då är

$$\begin{aligned}|2x-1|-2|x-1|=3x \quad &\Leftrightarrow \quad 1-2x-2(1-x)=3x \quad \Leftrightarrow \quad -1=3x\\ &\Leftrightarrow \quad x=-1/3.\end{aligned}$$

Här ser vi att $x=-1/3$ uppfyller att $x\leq 1/2$ och därmed är en lösning.

Fall 2: $1/2\leq x\leq 1$. Då är

$$|2x-1|-2|x-1|=3x \quad \Leftrightarrow \quad 2x-1-2(1-x)=3x \quad \Leftrightarrow \quad x=3,$$

vilket inte uppfyller kravet. Alltså ingen lösning (i detta fall).

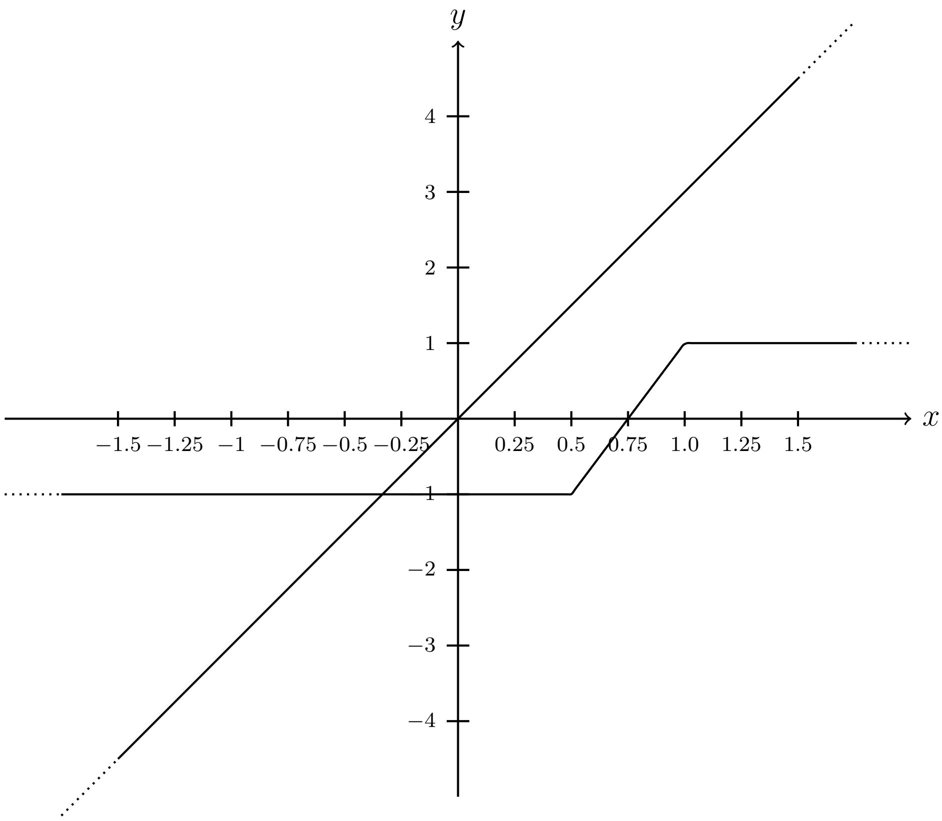
Fall 3: $x \geq 1$. Då är

$$\begin{aligned} |2x-1| - 2|x-1| = 3x \quad &\Leftrightarrow \quad 2x - 1 - 2(x-1) = 3x \quad \Leftrightarrow \quad 1 = 3x \\ &\Leftrightarrow \quad x = 1/3, \end{aligned}$$

vilket inte uppfyller kravet. Alltså ingen lösning (i detta fall).

Svar: $x = -1/3$.

Man kan även skissa vänster- och högerled i en graf för att se om svaret verkar rimligt.



3. Först skriver vi om olikheten för att få något som är enklare att studera:

$$\begin{aligned} \frac{3x}{1-x} \geq \frac{4}{x} \quad &\Leftrightarrow \quad 0 \leq \frac{3x}{1-x} - \frac{4}{x} = \frac{3x^2 - 4(1-x)}{x(1-x)} = \frac{3x^2 + 4x - 4}{x(1-x)} \\ &\Leftrightarrow \quad 0 \leq \frac{3\Big(\Big(\big(x + \frac{2}{3}\big)^2 - \frac{16}{9}\Big)\Big)}{x(1-x)} \quad \Leftrightarrow \quad 0 \geq \frac{(x+2)\left(x - \frac{2}{3}\right)}{x(x-1)}. \end{aligned}$$

Vi gör ett teckenschema för det funna bråket ovan.

		-2		0		$\frac{2}{3}$		1	
$x+2$	$-$	0	$+$		$+$		$+$		$+$
x	$-$		$-$	0	$+$		$+$		$+$
$x-2/3$	$-$		$-$		$-$	0	$+$		$+$
$x-1$	$-$		$-$		$-$		$-$	0	$+$
$\frac{(x+2)(x-2/3)}{x(x-1)}$	$+$	0	$-$	☠	$+$	0	$-$	☠	$+$

Vi ser ur tabellen att uttrycket är icke-positivt precis då $-2 \leq x < 0$ eller $2/3 \leq x < 1$.

Svar: $-2 \leq x < 0$ eller $2/3 \leq x < 1$.

4. Bortsett från fallet när tangenten är $x = 0$ så kan tangentens ekvation (om den finns) skrivas $y = kx$ för någon konstant k. Cirkelns ekvation ges av

$$x^2+y^2-6x-2y+5=0 \quad \Leftrightarrow \quad (x-3)^2-9+(y-1)^2-1+5=0 \quad \Leftrightarrow \quad (x-3)^2+(y-1)^2=5,$$

så mittpunkten blir $(3, 1)$ och radien $\sqrt{5}$. Vid skärningspunkter mellan linje och cirkel måste både linjens och cirkelns respektive ekvation vara uppfyllda, så endera är

$$9+(y-1)^2=5 \quad \Leftrightarrow \quad (y-1)^2=-4$$

om $x = 0$ (vilket saknar lösning) eller så är

$$\begin{aligned}
(x-3)^2+(kx-1)^2=5 \quad &\Leftrightarrow \quad x^2-6x+9+k^2x^2-2kx+1=5 \\
&\Leftrightarrow \quad (1+k^2)x^2-2(3+k)x=-5 \\
&\Leftrightarrow \quad x^2-\frac{2(3+k)x}{1+k^2}=-\frac{5}{1+k^2} \\
&\Leftrightarrow \quad \left(x-\frac{3+k}{1+k^2}\right)^2=\frac{(3+k)^2}{(1+k^2)^2}-\frac{5}{1+k^2}.
\end{aligned}$$

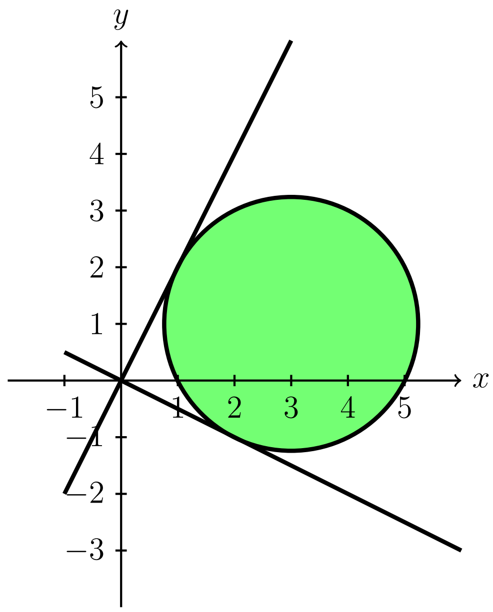
i fallet då $y = kx$. Eftersom vi söker en tangent så måste det finnas precis en skärningspunkt. Detta inträffar då det sista högerledet ovan blir noll, så

$$\frac{9+6k+k^2-5(1+k^2)}{(1+k^2)^2}=0 \quad \Leftrightarrow \quad 0=-4k^2+6k+4=-4\left(k^2-\frac{3k}{2}-1\right),$$

vilket ekvivalent (med hjälp av kvadratkomplettering och division med faktorn -4) kan formuleras om enligt

$$\left(k-\frac{3}{4}\right)^2=\frac{25}{16} \quad \Leftrightarrow \quad k=\frac{3}{4}\pm\frac{5}{4}=2 \text{ eller } -\frac{1}{2}.$$

Vi hittar alltså två tangenter som går genom origo: $y = 2x$ eller $y = -x/2$.



Svar: Cirkeln har centrum $(3, 1)$ och radie $\sqrt{5}$. Det finns två tangenter genom origo:

$$y = 2x \text{ eller } y = -x/2.$$

5. För att en lösning ska kunna existera måste $ax \geq 0$. Antag därför att detta är sant. Då gäller att

$$\sqrt{1+2x} = ax \quad \Leftrightarrow \quad 1+2x = a^2x^2 \quad \Leftrightarrow \quad a^2x^2 - 2x - 1 = 0.$$

Om $a = 0$ ser vi att $2x = -1$, så $x = -1/2$ är enda lösningen i detta fall.

Om $a \neq 0$ så blir

$$\begin{aligned} a^2x^2 - 2x - 1 = 0 \quad &\Leftrightarrow \quad x^2 - \frac{2x}{a^2} - \frac{1}{a^2} = \left(x - \frac{1}{a^2}\right)^2 - \frac{1}{a^4} - \frac{1}{a^2} = 0 \\ &\Leftrightarrow \quad \left(x - \frac{1}{a^2}\right)^2 = \frac{1+a^2}{a^4} \quad \Leftrightarrow \quad x = \frac{1}{a^2} \pm \frac{\sqrt{1+a^2}}{a^2} = \frac{1 \pm \sqrt{1+a^2}}{a^2}. \end{aligned}$$

Vi ser här att om $a < 0$ så är endast $x = \dfrac{1-\sqrt{1+a^2}}{a^2}$ en lösning (eftersom $\sqrt{1+a^2} > 1$) och om $a > 0$ så är endast $x = \dfrac{1+\sqrt{1+a^2}}{a^2}$ en lösning. Detta eftersom vi måste ha $ax \geq 0$.

Svar: $x = \begin{cases} \dfrac{1-\sqrt{1+a^2}}{a^2}, & a < 0, \\ -\dfrac{1}{2}, & a = 0, \\ \dfrac{1+\sqrt{1+a^2}}{a^2}, & a > 0. \end{cases}$