Lösningsförslag TATB01 2024-09-10

1. (a) Vi kvadratkompletterar uttrycket och finner att

$$p(x) = 2x^2 - 4x + 5 = 2\left(x^2 - 2x + \frac{5}{2}\right) = 2\left((x-1)^2 + \frac{3}{2}\right)$$
$$= \underbrace{2\,(x-1)^2}_{\geq 0} + 3$$

så minimum inträffar då $x = 1$ och minsta värdet är 3.

(b) Summan är aritmetisk och kan skrivas

$$-17 - 14 - 11 - \cdots + 217 = \sum_{k=0}^{n} (-17 + 3k)$$

där

$$-17 + 3n = 217 \quad \Leftrightarrow \quad 3n = 234 \quad \Leftrightarrow \quad n = 78$$

så summan har 79 termer. Den första termen är -17 och sista termen är 217, så summan blir

$$\sum_{k=0}^{78} (-17 + 3k) = \frac{-17 + 217}{2} \cdot 79 = 100 \cdot 79 = 7900.$$

(c) Låt $z = x + iy$, $x, y \in \mathbf{R}$. Då gäller att den givna ekvationen är ekvivalent med

$$(3+i)(x+iy) - 2i(x-iy) = 2 + i \quad \Leftrightarrow \quad 3x - 3y + i(3y - x) = 2 + i$$

så likhet gäller om och endast om

$$3x - 3y = 2 \quad \text{och} \quad 3y - x = 1.$$

Vi ser därmed efter addition av ekvationerna att $2x = 3$. Alltså måste $x = 3/2$ och $y = 3/2 - 2/3 = 5/6$, så $z = 3/2 + i5/6$.

Svar: (a) 3 (b) 7900 (c) $z = \dfrac{3}{2} + \dfrac{5i}{6}$.

2. Beloppen definieras enligt

$$|1 - x| = \begin{cases} 1 - x, & x \leq 1, \\ x - 1, & x \geq 1, \end{cases} \qquad \text{och} \qquad |3x - 1| = \begin{cases} 1 - 3x, & x \leq \dfrac{1}{3}, \\ 3x - 1, & x \geq \dfrac{1}{3}. \end{cases}$$

Intressanta punkter är alltså $x = 1$ och $x = \dfrac{1}{3}$. Vi delar upp i tre fall.

Fall 1: $x \leq \dfrac{1}{3}$. Då är

$$|1 - x| = 3 - |3x - 1| \quad \Leftrightarrow \quad 1 - x = 3 - (1 - 3x) \quad \Leftrightarrow \quad -1 = 4x$$
$$\Leftrightarrow \quad x = -\frac{1}{4},$$

vilket uppfyller kravet. Alltså en lösning.

Fall 2: $\dfrac{1}{3} \le x \le 1$. Då är

$$\begin{aligned} |1-x| = 3 - |3x-1| \quad &\Leftrightarrow \quad 1 - x = 3 - (3x-1) \quad \Leftrightarrow \quad 2x = 3 \\ &\Leftrightarrow \quad x = \frac{3}{2}, \end{aligned}$$

vilket inte uppfyller kravet. Ingen lösning (i detta fall).

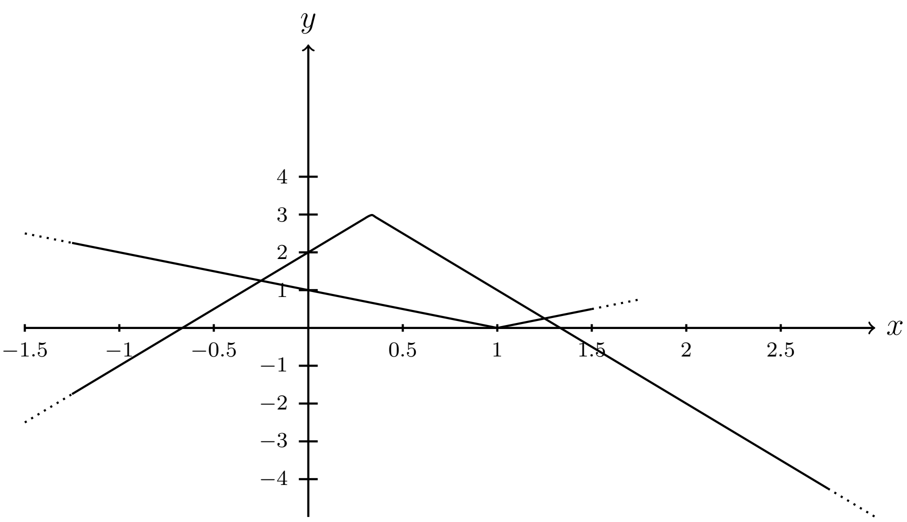
Fall 3: $x \ge 1$. Då är

$$\begin{aligned} |1-x| = 3 - |3x-1| \quad &\Leftrightarrow \quad x - 1 = 3 - (3x-1) \quad \Leftrightarrow \quad 4x = 5 \\ &\Leftrightarrow \quad x = \frac{5}{4}, \end{aligned}$$

vilket uppfyller kravet. Alltså en lösning.

Svar: $x = -\dfrac{1}{4}$ eller $x = \dfrac{5}{4}$.

Man kan även skissa vänster- och högerled i en graf för att se om svaret verkar rimligt.



3. Först skriver vi om olikheten för att få något som är enklare att studera:

$$\begin{aligned} \frac{1}{x^2-1} - \frac{8}{x-1} < 4 \quad &\Leftrightarrow \quad \frac{1 - 8(x+1) - 4(x^2-1)}{(x-1)(x+1)} < 0 \quad \Leftrightarrow \quad \frac{-3 - 8x - 4x^2}{(x-1)(x+1)} < 0 \\ &\Leftrightarrow \quad \frac{3 + 8x + 4x^2}{(x-1)(x+1)} > 0. \end{aligned}$$

Vi noterar att

$$3 + 8x + 4x^2 = 4\left((x+1)^2 - \frac{1}{4}\right) = 4\left(x + \frac{3}{2}\right)\left(x + \frac{1}{2}\right) = (2x+3)(2x+1)$$

så

$$\frac{3 + 8x + 4x^2}{(x-1)(x+1)} > 0 \quad \Leftrightarrow \quad \frac{(2x+3)(2x+1)}{(x-1)(x+1)} > 0.$$

Vi gör ett teckenschema för det funna bråket ovan.

		$-\frac{3}{2}$		-1		$-\frac{1}{2}$		1	
$2x+3$	$-$	0	$+$		$+$		$+$		$+$
$x+1$	$-$		$-$	0	$+$		$+$		$+$
$2x+1$	$-$		$-$		$-$	0	$+$		$+$
$x-1$	$-$		$-$		$-$		$-$	0	$+$
$\dfrac{(2x+3)(2x+1)}{(x-1)(x+1)}$	$+$	0	$-$	☠	$+$	0	$-$	☠	$+$

Vi ser ur tabellen att uttrycket är positivt precis då $x < -\frac{3}{2}$, $\;-1 < x < -\frac{1}{2}$ eller $x > 1$.

Svar: $x < -\frac{3}{2}$, $-1 < x < -\frac{1}{2}$ eller $x > 1$.

4. Ekvationen kan skrivas om enligt

$$z^2 - 4z + 8 = 2i(1-2z) \quad \Leftrightarrow \quad z^2 + (4i-4)z + 8 - 2i = 0.$$

Vi kvadratkompletterar vänsterledet för att få en enklare ekvation att hantera:

$$\begin{aligned} z^2 + (4i-4)z + 8 - 2i &= (z+2i-2)^2 - (2i-2)^2 + 8 - 2i \\ &= (z+2i-2)^2 + 8i + 8 - 2i \\ &= (z+2i-2)^2 + 6i + 8. \end{aligned}$$

Låt $z + 2i - 2 = x + iy$ där $x, y \in \mathbf{R}$. Vi söker nu alla lösningar till

$$(x+iy)^2 = -8 - 6i. \tag{†}$$

Då gäller att

$$x^2 + 2ixy - y^2 = -8 - 6i \quad \Leftrightarrow \quad \begin{cases} x^2 - y^2 = -8, \\ xy = -3. \end{cases}$$

Vidare följer det av (†) att

$$x^2 + y^2 = |-8-6i| = \sqrt{64+36} = \sqrt{100} = 10.$$

Härur kan vi till exempel se att

$$(x^2 - y^2) + (x^2 + y^2) = -8 + 10 = 2 \quad \Leftrightarrow \quad 2x^2 = 2 \quad \Leftrightarrow \quad x = \pm 1.$$

Eftersom $y = -\frac{3}{x}$ så erhåller vi lösningarna

$$z = x + iy + 2 - 2i = \pm(1-3i) + 2 - 2i \quad \Leftrightarrow \quad z = 3 - 5i \quad \text{eller} \quad z = 1 + i.$$

Svar: $z = 3 - 5i$ eller $z = 1 + i$.

5. Notera att $\dfrac{2}{k^2+2k} = \dfrac{k+2-k}{k(k+2)} = \dfrac{1}{k} - \dfrac{1}{k+2}$ så följaktligen blir

$$\sum_{k=1}^{99} \frac{2}{k^2+2k} = \sum_{k=1}^{99} \left(\frac{1}{k} - \frac{1}{k+2} \right).$$

Detta är en så kallad teleskopsumma och vi noterar nu att summan i högerledet kan skrivas ut enligt

$$\left(1-\frac{1}{3}\right)+\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{4}\right)+\left(\frac{1}{3}-\frac{1}{5}\right)+\left(\frac{1}{4}-\frac{1}{6}\right)+\left(\frac{1}{5}-\frac{1}{7}\right)$$
$$+\cdots+\left(\frac{1}{97}-\frac{1}{99}\right)+\left(\frac{1}{98}-\frac{1}{100}\right)+\left(\frac{1}{99}-\frac{1}{101}\right)=1+\frac{1}{2}-\frac{1}{100}-\frac{1}{101},$$

där de flesta termer i varje parentes tas ut av en identisk term med ombytt tecken i en parentes två steg därifrån. Vi förenklar uttrycket och finner därmed att

$$\sum_{k=1}^{99}\frac{2}{k^2+2k}=\frac{3}{2}-\frac{1}{100}-\frac{1}{101}=\frac{14949}{10100}.$$

Svar: $\frac{14949}{10100}$.