Lösningsförslag TATB01 2024-10-22

1. (a)

$$\left|\frac{1+i}{1-2i}-2i\right| = \left|\frac{1+i-2i(1-2i)}{1-2i}\right| = \left|\frac{-3-i}{1-2i}\right| = \frac{\sqrt{(-3)^2+(-1)^2}}{\sqrt{1+4}} = \frac{\sqrt{10}}{\sqrt{5}} = \sqrt{2}.$$

(b) Enligt binomialsatsen följer det att

$$(2x+1)^5 = \sum_{k=0}^{5}\binom{5}{k}(2x)^k 1^{n-k} = 1+10x+40x^2+80x^3+80x^4+32x^5.$$

(c) Vi ser att summan är geometrisk med $50-(-50)+1=101$ termer, kvoten $1/2$ och första term $2^{4-(-50)}=2^{54}$, så

$$\sum_{k=-50}^{50} 2^{4-k} = 2^{54}\cdot\frac{1-\left(\frac{1}{2}\right)^{101}}{1-\frac{1}{2}} = 2^{55}\left(1-\left(\frac{1}{2}\right)^{101}\right) = 2^{55}-2^{-46}.$$

Svar: (a) $\sqrt{2}$ (b) se ovan (c) $2^{55}-2^{-46}$.

2. Låt oss stuva om i ekvationen för att sedan kvadrera båda leden (observera att det då bara blir en implikation!):

$$\begin{aligned}
x+3+\sqrt{2-2x}=0 \quad &\Leftrightarrow \quad \sqrt{2-2x}=-x-3\\
&\Rightarrow \quad 2-2x=(-x-3)^2=9+6x+x^2\\
&\Leftrightarrow \quad x^2+8x+7=0\\
&\Leftrightarrow \quad (x+4)^2=9 \quad \Leftrightarrow \quad x=-4\pm 3\\
&\Leftrightarrow \quad x=-1 \quad \text{eller} \quad x=-7.
\end{aligned}$$

Eftersom vi har en implikation **måste** svaren testas. Om $x=-1$ ser vi att

$$\mathrm{VL} = -1+3+\sqrt{2-2(-1)} = 2+\sqrt{4} = 4 \neq 0 = \mathrm{HL},$$

så $x=-1$ är *inte* en lösning. Om $x=-7$ är

$$\mathrm{VL} = -7+3+\sqrt{2-2(-7)} = -4+\sqrt{16} = -4+4 = 0 = \mathrm{HL}.$$

Eftersom vänsterled och högerled stämmer överens så är $x=-7$ en lösning.

Svar: $x=-7$.

3. Först skriver vi om olikheten för att få något som är enklare att studera:

$$\frac{11-3x}{(2x+1)(x-1)} \le 1 \quad \Leftrightarrow \quad 0 \le 1-\frac{11-3x}{(2x+1)(x-1)} = \frac{2x^2+2x-12}{(2x+1)(x-1)}.$$

Eftersom

$$2x^2+2x-12 = 2\left(\left(x+\frac{1}{2}\right)^2-\frac{25}{4}\right) = 2(x+3)(x-2)$$

så gäller att

$$\frac{11-3x}{(2x+1)(x-1)} \le 1 \quad \Leftrightarrow \quad \frac{2(x+3)(x-2)}{(2x+1)(x-1)} \ge 0 \quad \Leftrightarrow \quad \frac{(x+3)(x-2)}{(2x+1)(x-1)} \ge 0.$$

Vi gör ett teckenschema för det funna bråket ovan.

		-3		$-\frac{1}{2}$		1		2	
$x+3$	$-$	0	$+$		$+$		$+$		$+$
$2x+1$	$-$		$-$	0	$+$		$+$		$+$
$x-1$	$-$		$-$		$-$	0	$+$		$+$
$x-2$	$-$		$-$		$-$		$-$	0	$+$
$\dfrac{(x+3)(x-2)}{(2x+1)(x-1)}$	$+$	0	$-$	☠	$+$	☠	$-$	0	$+$

Vi ser ur tabellen att uttrycket är icke-negativt precis då $x \leq -3$, $-\frac{1}{2} < x < 1$ eller $x \geq 2$.

Svar: $x \leq -3$, $-\frac{1}{2} < x < 1$ eller $x \geq 2$.

4. (a) Cirkelns ekvation ges av

$$\begin{aligned} x^2 - 6x + y^2 + 2y + 3 = 0 \quad &\Leftrightarrow \quad (x-3)^2 - 9 + (y+1)^2 - 1 + 3 = 0 \\ &\Leftrightarrow \quad (x-3)^2 + (y+1)^2 = 7, \end{aligned}$$

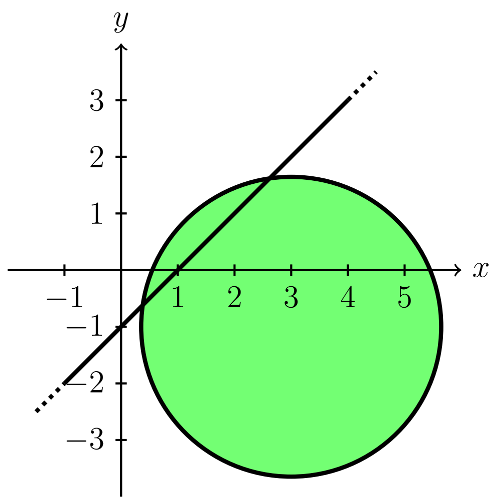
så mittpunkten blir $(3, -1)$ och radien $\sqrt{7}$.

(b) Vid skärningspunkter mellan linje och cirkel måste både linjens och cirkelns respektive ekvation vara uppfyllda, så

$$\begin{aligned} (x-3)^2 + (-1+x+1)^2 = 7 \quad &\Leftrightarrow \quad x^2 - 6x + 9 + x^2 = 7 \quad \Leftrightarrow \quad x^2 - 3x + 1 = 0 \\ &\Leftrightarrow \quad \left(x - \frac{3}{2}\right)^2 = \frac{5}{4} \quad \Leftrightarrow \quad x = \frac{3 \pm \sqrt{5}}{2}. \end{aligned}$$

Skärningspunkterna ges därmed av

$$\left(\frac{3+\sqrt{5}}{2}, \frac{1+\sqrt{5}}{2}\right) \quad \text{och} \quad \left(\frac{3-\sqrt{5}}{2}, \frac{1-\sqrt{5}}{2}\right).$$



Svar: (a) Cirkeln har centrum $(3, -1)$ och radie $\sqrt{7}$;

(b) $$\left(\frac{3+\sqrt{5}}{2}, \frac{1+\sqrt{5}}{2}\right) \quad \text{och} \quad \left(\frac{3-\sqrt{5}}{2}, \frac{1-\sqrt{5}}{2}\right).$$

5. Vi noterar att

$$\big||5-x|-2|x+2|\big| \leq |x-2| \quad \Leftrightarrow \quad -|x-2| \leq |5-x|-2|x+2| \leq |x-2|,$$

så vi delar upp i fyra fall.

Fall 1: $x \leq -2$. Då är

$$\begin{aligned} -|x-2| \leq |5-x|-2|x+2| \leq |x-2| \quad &\Leftrightarrow \quad -2+x \leq 9+x \leq 2-x \\ &\Leftrightarrow \quad -2 \leq 9 \leq 2-2x \quad \Leftrightarrow \quad x \leq -\frac{7}{2}, \end{aligned}$$

där vi ser att alla $x \leq -7/2$ uppfyller att $x \leq -2$.

Fall 2: $-2 \leq x \leq 2$. Då är

$$-|x-2| \leq |5-x|-2|x+2| \leq |x-2| \quad \Leftrightarrow \quad -2+x \leq 1-3x \leq 2-x$$

vilket gäller om och endast om

$$\begin{cases} x-2 \leq 1-3x \\ \text{och} \\ 1-3x \leq 2-x \end{cases} \quad \Leftrightarrow \quad \begin{cases} x \leq \dfrac{3}{4} \\ \text{och} \\ x \geq -\dfrac{1}{2}. \end{cases}$$

Då ser vi att alla $-1/2 \leq x \leq 3/4$ uppfyller kravet i detta fall.

Fall 3: $2 \leq x \leq 5$. Då är

$$-|x-2| \leq |5-x|-2|x+2| \leq |x-2| \quad \Leftrightarrow \quad 2-x \leq 1-3x \leq x-2$$

vilket gäller om och endast om

$$\begin{cases} 2-x \leq 1-3x \\ \text{och} \\ 1-3x \leq x-2 \end{cases} \quad \Leftrightarrow \quad \begin{cases} x \leq -\dfrac{1}{2} \\ \text{och} \\ x \geq \dfrac{3}{4}. \end{cases}$$

Dessa olikheter motsäger varandra, så vi finner inga x som uppfyller olikheten i detta fall.

Fall 4: $x \geq 5$. Då är

$$\begin{aligned} -|x-2| \leq |5-x|-2|x+2| \leq |x-2| \quad &\Leftrightarrow \quad 2-x \leq -9-x \leq x-2 \\ &\Leftrightarrow \quad 2 \leq -9 \leq 2x-2, \end{aligned}$$

vilket inte stämmer för något x.

Svar: $x \leq -\dfrac{7}{2}$ eller $-\dfrac{1}{2} \leq x \leq \dfrac{3}{4}$.