

## Svar (med ledningar) TATB01 2025-10-21

- (a) Använd vanliga algebraiska räkneregler.  
(b) Det är en aritmetisk summa med 80 termer.  
(c) Man kan skriva uttrycket i  $\operatorname{Im}(\cdot)$  som  $7/5 + i/5$ .

**Svar:** (a)  $-1$       (b)  $8040$       (c)  $1/5$ .

- Först gissar vi roten  $z = -2$  och utför sedan en polynomdivision med  $z + 2$  och erhåller

$$p(z) = (z + 2)(8z^2 + 6z - 9).$$

Kvadratkomplettering och faktorisering av den andra faktorn i högerledet ger sedan svaret.

**Svar:**  $p(z) = (z + 2)(2z + 3)(4z - 3) = 8(z + 2)(z + 3/2)(z - 3/4)$ .

- Isolering av kvadratroten,

$$\sqrt{2x^2 + 4x - 4} = 1 - 2x,$$

och kvadrering (där vi bara får implikation) ger

$$2x^2 - 7x + 5 = 0 \quad \Leftrightarrow \quad x = 1 \text{ eller } x = \frac{5}{2}.$$

En noggrann kontroll visar att varken  $x = 1$  eller  $x = 5/2$  är lösningar. Alternativt kan vi kvadrera med ekvivalens tillsammans med villkoret  $x \leq 1/2$ .

**Svar:** Lösning saknas.

- Division med 2 och kvadratkomplettering visar att

$$2z^2 + 5iz - 4 + 3i = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \left(z + \frac{5i}{4}\right)^2 = \frac{7}{16} - \frac{3i}{2}.$$

Låt  $z + 5i/4 = x + iy$  där  $x, y \in \mathbf{R}$  och betrakta real- och imaginärdel:

$$x^2 + 2ixy - y^2 = \frac{7}{16} - \frac{3i}{2} \quad \Leftrightarrow \quad \begin{cases} x^2 - y^2 = 7/16, \\ xy = -3/4. \end{cases}$$

Hjälpekvationen kan skrivas  $x^2 + y^2 = \sqrt{\frac{7^2}{16^2} + \frac{24^2}{16^2}} = \sqrt{\frac{625}{256}} = \frac{25}{16}$ .

**Svar:**  $z = 1 - 2i$  eller  $z = -1 - i/2$ .

- Cirkelns ekvation kan skrivas  $(x - 2)^2 + (y - 4)^2 = 3$  och skärningar med linjen finner vi genom att lösa

$$\begin{cases} (x - 2)^2 + (y - 4)^2 = 3, \\ y = 2x + m \end{cases} \quad \Leftrightarrow \quad \begin{cases} (x + 2(m - 5)/5)^2 = 3/5 - m^2/25, \\ y = 2x + m. \end{cases}$$

Precis en skärningspunkt finner vi således endast när  $3/5 - m^2/25 = 0$ .

**Svar:**  $m = \pm\sqrt{15}$ .