Lösningsförslag TATB01 2021-09-27 14–18

1. (a) Låt oss stuva om i ekvationen för att sedan kvadrera båda leden (observera att det då bara blir en implikation!):

$$
\begin{aligned}
x+\sqrt{x+\frac{3}{4}}=0 \quad &\Leftrightarrow \quad \sqrt{x+\frac{3}{4}}=-x \\
&\Rightarrow \quad x+\frac{3}{4}=(-x)^2=x^2 \\
&\Leftrightarrow \quad x^2-x-\frac{3}{4}=0 \quad \Leftrightarrow \quad \left(x-\frac{1}{2}\right)^2=1 \\
&\Leftrightarrow \quad x=\frac{1}{2}\pm 1 \quad \Leftrightarrow \quad x=\frac{3}{2} \quad \text{eller} \quad x=-\frac{1}{2}.
\end{aligned}
$$

Eftersom vi har en implikation **måste** svaren testas. Om $x=\frac{3}{2}$ ser vi att

$$
\mathrm{VL}=\frac{3}{2}+\sqrt{\frac{3}{2}+\frac{3}{4}}=\frac{3}{2}+\sqrt{\frac{9}{4}}=\frac{3}{2}+\frac{3}{2}=3\neq 0=\mathrm{HL},
$$

så detta är inte en lösning. Om $x=-\frac{1}{2}$ är

$$
\mathrm{VL}=-\frac{1}{2}+\sqrt{-\frac{1}{2}+\frac{3}{4}}=-\frac{1}{2}+\sqrt{\frac{1}{4}}=-\frac{1}{2}+\frac{1}{2}=0=\mathrm{HL},
$$

så detta är en lösning.

(b) Summan är aritmetisk och har 133 termer. Den första termen ser vi är $2-6\cdot 1=-4$ och sista termen är $2-6\cdot 133=-796$, så summan blir

$$
\sum_{k=1}^{133}(2-6k)=\frac{-4-796}{2}\cdot 133=-400\cdot 133=-53200.
$$

Svar: (a) $x=-\frac{1}{2}$ (b) -53200.

2. (a) Vänsterledet är definierat då $x>-3$ och $x>0$ (så $x>0$) medan högerledet är definierat då $x>1$. Vi måste därför kräva att $x>1$. För $x>1$ gäller att

$$
\begin{aligned}
\ln(x+3)-\ln x+\ln 6=\ln(x-1) \quad &\Leftrightarrow \quad \ln(6(x+3))=\ln\big(x(x-1)\big) \\
&\Leftrightarrow \quad 6(x+3)=x(x-1)
\end{aligned}
$$

eftersom ln är injektiv. Alltså måste

$$
\begin{aligned}
x^2-7x-18=0 \quad &\Leftrightarrow \quad \left(x-\frac{7}{2}\right)^2=\frac{49}{4}+18=\frac{121}{4} \\
&\Leftrightarrow \quad x=\frac{7}{2}\pm\frac{11}{2} \quad \Leftrightarrow \quad x=-2 \text{ eller } x=9.
\end{aligned}
$$

Endast $x=9$ uppfyller kravet ovan.

(b) Eftersom ln är injektiv så ser vi att

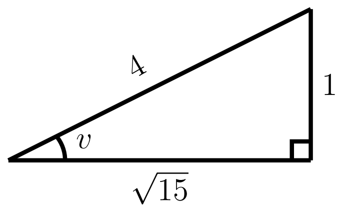
$$\begin{aligned} 3^{t-1} = 4^t \quad &\Leftrightarrow \quad (t-1)\ln 3 = t\ln 4 \quad \Leftrightarrow \quad t(\ln 3 - \ln 4) = \ln 3 \\ &\Leftrightarrow \quad t = \frac{\ln 3}{\ln 3 - \ln 4}. \end{aligned}$$

Svar: (a) $x = 9$ (b) $t = \dfrac{\ln 3}{\ln 3 - \ln 4}$.

3. (a) Låt $v = \arcsin \dfrac{1}{4}$.

Då gäller att $0 < v < \pi/2$, så vi ser direkt ur en hjälptriangel att

$$\tan v = \frac{1}{\sqrt{15}} = \frac{\sqrt{15}}{15}.$$



(b) Vi ser direkt ur enhetscirkeln att

$$\begin{aligned} &\cos 4x + \cos\left(3x + \frac{\pi}{5}\right) = 0 \\ \Leftrightarrow \quad &\cos(4x) = -\cos\left(3x + \frac{\pi}{5}\right) = \cos\left(\pi - \left(3x + \frac{\pi}{5}\right)\right) = \cos\left(\frac{4\pi}{5} - 3x\right) \\ \Leftrightarrow \quad &\pm 4x = \frac{4\pi}{5} - 3x + 2\pi n,\ n \in \mathbf{Z}, \end{aligned}$$

så

$$7x = \frac{4\pi}{5} + 2\pi n \quad \Leftrightarrow \quad x = \frac{4\pi}{35} + \frac{2\pi n}{7}$$

eller

$$-x = \frac{4\pi}{5} + 2\pi n \quad \Leftrightarrow \quad x = -\frac{4\pi}{5} - 2\pi n.$$

(c) Vi börjar med nämnaren:

$$v_1 = \arccos\left(\cos\left(\frac{3\pi}{5}\right)\right) \quad \Leftrightarrow \quad \begin{cases} \cos v_1 = \cos\frac{3\pi}{5}, \\ 0 \le v_1 \le \pi, \end{cases} \quad \Leftrightarrow \quad \begin{cases} v_1 = \pm\frac{3\pi}{5} + 2\pi n, \\ 0 \le v_1 \le \pi, \end{cases}$$

vilket är ekvivalent med att $v_1 = \dfrac{3\pi}{5}$. På samma sätt kan täljaren skrivas

$$\begin{aligned} v_2 = \arcsin\left(\sin\frac{3\pi}{5}\right) \quad &\Leftrightarrow \quad \begin{cases} \sin v_2 = \sin\frac{3\pi}{5}, \\ -\pi/2 \le v_2 \le \pi/2, \end{cases} \\ &\Leftrightarrow \quad \begin{cases} v_2 = \frac{3\pi}{5} + 2\pi n \text{ eller } v_2 = \pi - \frac{3\pi}{5} + 2\pi n, \\ -\pi/2 \le v_2 \le \pi/2, \end{cases} \end{aligned}$$

vilket är ekvivalent med att $v_2 = \dfrac{2\pi}{5}$. Följaktligen får vi

$$\frac{\arcsin\left(\sin\frac{3\pi}{5}\right)}{\arccos\left(\cos\frac{3\pi}{5}\right)} = \frac{\frac{2\pi}{5}}{\frac{3\pi}{5}} = \frac{2}{3}.$$

Svar: (a) $\dfrac{1}{\sqrt{15}}$ (b) $\dfrac{4\pi}{35} + \dfrac{2\pi n}{7}$, $n \in \mathbf{Z}$, eller $-\dfrac{4\pi}{5} - 2\pi n$, $n \in \mathbf{Z}$ (c) $\dfrac{2}{3}$.

4. Vi använder oss av hjälpvinkelmetoden och skriver om vänsterledet enligt

$$\sin 3x - \sqrt{3}\cos 3x = C\sin(3x + \psi),$$

med $C > 0$ och $\psi \in \mathbf{R}$. Då ska alltså, enligt additionsformeln för sinus,

$$C\sin(3x + \psi) = C\left(\sin 3x \cos\psi + \cos 3x \sin\psi\right) = \sin 3x - \sqrt{3}\cos 3x.$$

Genom att, till exempel, låta $x = 0$ och $x = \pi/6$, erhåller vi sambanden

$$\begin{cases} C\sin\psi &= -\sqrt{3}, \\ C\cos\psi &= 1. \end{cases}$$

För att bestämma C kvadrerar vi dessa ekvationer och summerar för att finna att

$$C^2 = C^2(\sin^2\psi + \cos^2\psi) = (-\sqrt{3})^2 + 1^2 = 4.$$

Alltså är $C = 2$ ett lämpligt val, och vi finner ψ genom att lösa

$$\begin{cases} \cos\psi &= \dfrac{1}{2}, \\ \sin\psi &= -\dfrac{\sqrt{3}}{2} \end{cases} \quad\Leftrightarrow\quad \psi = -\frac{\pi}{3} + 2m\pi,\ m \in \mathbf{Z}.$$

Rita en enhetscirkel för att se detta! Vi väljer $\psi = -\dfrac{\pi}{3}$.

Därmed kan vi säga att

$$\begin{aligned} \sin 3x - \sqrt{3}\cos 3x = \sqrt{2} \quad &\Leftrightarrow \quad 2\sin\left(3x - \frac{\pi}{3}\right) = \sqrt{2} \\ &\Leftrightarrow \quad \sin\left(3x - \frac{\pi}{3}\right) = \sin\frac{\pi}{4} \\ &\Leftrightarrow \quad \begin{cases} 3x - \dfrac{\pi}{3} = \dfrac{\pi}{4} + 2\pi n,\ n \in \mathbf{Z}, \\ \qquad\text{eller} \\ 3x - \dfrac{\pi}{3} = \dfrac{3\pi}{4} + 2\pi n,\ n \in \mathbf{Z}. \end{cases} \end{aligned}$$

Alltså blir

$$3x = \frac{\pi}{3} + \frac{\pi}{4} + 2\pi n \quad\Leftrightarrow\quad x = \frac{\pi}{9} + \frac{\pi}{12} + \frac{2\pi n}{3} = \frac{7\pi}{36} + \frac{2\pi n}{3}$$

eller

$$3x = \frac{\pi}{3} + \frac{3\pi}{4} + 2\pi n \quad\Leftrightarrow\quad x = \frac{\pi}{9} + \frac{\pi}{4} + \frac{2\pi n}{3} = \frac{13\pi}{36} + \frac{2\pi n}{3}.$$

Svar: $x = \dfrac{7\pi}{36} + \dfrac{2\pi n}{3}$, $n \in \mathbf{Z}$, eller $x = \dfrac{13\pi}{36} + \dfrac{2\pi n}{3}$, $n \in \mathbf{Z}$.

5. (a) För $x \in \mathbf{R}$ definierar vi $e^{ix} = \cos x + i \sin x$.

   (b) Notera att

$$z^5 + 4 + 4i = 0 \quad \Leftrightarrow \quad z^5 = -4 - 4i = 4\sqrt{2}\left(-\frac{1}{\sqrt{2}} - \frac{i}{\sqrt{2}}\right) = 4\sqrt{2}\, e^{-i3\pi/4},$$

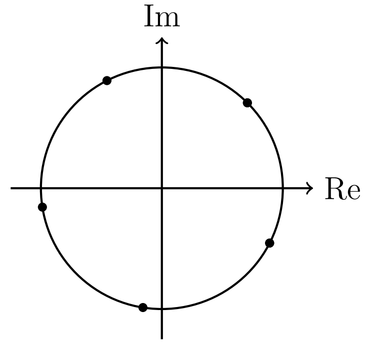
där vi ser likheterna enklast genom att rita en enhetscirkel (rita en figur!). Låt nu $z = re^{i\varphi}$, där $r \geq 0$ och $\varphi \in \mathbf{R}$. Då måste

$$z^5 = r^5 e^{i5\varphi} = 4\sqrt{2}\, e^{-i3\pi/4} \quad \Leftrightarrow \quad \begin{cases} r^5 = 4\sqrt{2},\ r \geq 0, \\ 5\varphi = -3\pi/4 + 2\pi n,\ n \in \mathbf{Z}. \end{cases} \tag{1}$$

Detta visar att $r = 32^{1/10} = (2^5)^{1/10} = \sqrt{2}$ och $\varphi = -\dfrac{3\pi}{20} + \dfrac{2n\pi}{5}$, $n \in \mathbf{Z}$.

Våra lösningar blir nu

$$z = 32^{1/10}\, e^{i\left(-\frac{3\pi}{20} + \frac{2n\pi}{5}\right)}, \quad n = 0, 1, 2, 3, 4.$$



Här har vi valt att endast numrera de lösningar som är unika (när $n = 5$ får vi samma lösning som när $n = 0$ etc). Observera dock att för ekvivalensen i ekvation (1) **måste** vi ha $n \in \mathbf{Z}$ godtycklig.

Svar: $z = 32^{1/10}\, e^{i\left(-\frac{3\pi}{20} + \frac{2n\pi}{5}\right)}$, $n = 0, 1, 2, 3, 4$.

6. För att $f(x)$ ska vara definierad måste vi kräva att $x \geq 0$ (för att $\sqrt{x}$ ska vara definierad) samt att

$$\ln\left(\frac{\sqrt{x}-2}{\sqrt{x}-1}\right) \geq 0 \quad \Leftrightarrow \quad \frac{\sqrt{x}-2}{\sqrt{x}-1} \geq 1 \quad \Leftrightarrow \quad 0 \leq \frac{\sqrt{x}-2-(\sqrt{x}-1)}{\sqrt{x}-1} = \frac{-1}{\sqrt{x}-1}$$
$$\Leftrightarrow \quad \sqrt{x} < 1 \quad \Leftrightarrow \quad 0 \leq x < 1,$$

där vi utnyttjat att ln är strängt växande. Notera att detta villkor även är tillräckligt för att säkert veta att logaritmen i $f(x)$ är definierad (varför?). Definitionsmängden blir således

$$D_f = [0,\ 1[\,.$$

För $x \in D_f$ gäller att

$$y = \sqrt{\ln\left(\frac{\sqrt{x}-2}{\sqrt{x}-1}\right)} \quad \Rightarrow \quad y^2 = \ln\left(\frac{\sqrt{x}-2}{\sqrt{x}-1}\right) \quad \Leftrightarrow \quad e^{y^2} = \frac{\sqrt{x}-2}{\sqrt{x}-1}$$
$$\Leftrightarrow \quad e^{y^2}(\sqrt{x}-1) = \sqrt{x}-2 \quad \Leftrightarrow \quad \left(e^{y^2}-1\right)\sqrt{x} = e^{y^2}-2$$
$$\Leftrightarrow \quad \sqrt{x} = \frac{e^{y^2}-2}{e^{y^2}-1} \quad \Rightarrow \quad x = \left(\frac{e^{y^2}-2}{e^{y^2}-1}\right)^2,$$

då exp och ln är varandras inverser. Eftersom vi finner högst en lösning för varje y är f injektiv och ett uttryck för inversen ges av

$$f^{-1}(y) = \left(\frac{e^{y^2}-2}{e^{y^2}-1}\right)^2.$$

Svar: $D_f = [0,\, 1[,\; f^{-1}(y) = \left(\dfrac{e^{y^2}-2}{e^{y^2}-1}\right)^2.$

7. Vi använder Eulers formler och binomialsatsen för att skriva

$$
\begin{aligned}
\sin^3 u &= \left(\frac{e^{iu}-e^{-iu}}{2i}\right)^3 = -\frac{1}{8i}\left(e^{iu}-e^{-iu}\right)^3 = -\frac{1}{8i}\left(e^{i3u}-3e^{iu}+3e^{-iu}-e^{-i3u}\right) \\
&= -\frac{1}{4}\left(\sin 3u - 3\sin u\right).
\end{aligned}
$$

Med detta samband och $u = 3^{-n}t$ så ser vi nu att

$$
\begin{aligned}
\sum_{n=1}^{m} 3^{n-1}\sin^3 3^{-n}t &= \frac{1}{4}\sum_{n=1}^{m}\left(3^{n-1}\cdot 3\sin 3^{-n}t - 3^{n-1}\sin 3\cdot 3^{-n}t\right) \\
&= \frac{1}{4}\sum_{n=1}^{m}\left(3^{n}\sin 3^{-n}t - 3^{n-1}\sin 3^{-(n-1)}t\right).
\end{aligned}
$$

Notera nu att detta är en så kallad teleskopsumma, så om vi skriver ut lite termer ser vi att vi får

$$
\begin{aligned}
\frac{1}{4}\Bigg(\left(3\sin\frac{t}{3}-\sin t\right) + \left(3^2\sin\frac{t}{3^2}-3\sin\frac{t}{3}\right) + \left(3^3\sin\frac{t}{3^3}-3^2\sin\frac{t}{3^2}\right) \\
+\cdots+\left(3^m\sin\frac{t}{3^m}-3^{m-1}\sin\frac{t}{3^{m-1}}\right)\Bigg)
\end{aligned}
$$

från vilket det följer att

$$
\sum_{n=1}^{m} 3^{n-1}\sin^3 3^{-n}t = \frac{3^m}{4}\sin\frac{t}{3^m} - \frac{1}{4}\sin t.
$$

Svar: $\displaystyle\sum_{n=1}^{m} 3^{n-1}\sin^3 3^{-n}t = \frac{3^m}{4}\sin\frac{t}{3^m} - \frac{1}{4}\sin t.$