Lösningsförslag TATB01 2024-09-30

1. (a) Låt oss kvadrera båda leden (observera att det då bara blir en implikation!):

$$\begin{aligned}\sqrt{3-2x^2-3x}=1-2x \quad &\Rightarrow \quad 3-2x^2-3x=(1-2x)^2=1-4x+4x^2\\ &\Leftrightarrow \quad x^2-\frac{1}{6}x-\frac{1}{3}=0\\ &\Leftrightarrow \quad \left(x-\frac{1}{12}\right)^2=\frac{49}{144} \quad \Leftrightarrow \quad x=\frac{1}{12}\pm\frac{7}{12}\\ &\Leftrightarrow \quad x=\frac{2}{3} \quad \text{eller} \quad x=-\frac{1}{2}.\end{aligned}$$

Eftersom vi har en implikation **måste** svaren testas. Om $x=2/3$ ser vi att

$$\mathrm{VL}=\sqrt{3-2(2/3)^2-3(2/3)}=\sqrt{1/9}=1/3\neq 1-2(2/3)=-1/3=\mathrm{HL},$$

så $x=2/3$ är *inte* en lösning. Om $x=-1/2$ är

$$\mathrm{VL}=\sqrt{3-2(-1/2)^2-3(-1/2)}=\sqrt{4}=2=1-2(-1/2)=\mathrm{HL}.$$

Eftersom vänsterled och högerled stämmer överens så är $x=-1/2$ en lösning.

(b) Enligt räknelag och definition blir

$$\binom{30}{27}=\binom{30}{3}=\frac{30\cdot 29\cdot 28}{3\cdot 2}=10\cdot 29\cdot 14=10\cdot(30\cdot 14-14)=4060.$$

Svar: (a) $x=-\dfrac{1}{2}$ (b) 4060.

2. (a) Vi formulerar om ekvationen i enlighet med välkända algebraiska regler:

$$2(27^x+9)=9^x+5\cdot 3^{x+1} \quad \Leftrightarrow \quad 2((3^x)^3+9)=(3^x)^2+15\cdot 3^x.$$

Låt $t=3^x$. Då är $t>0$ och så gäller att ekvationen ekvivalent kan skrivas

$$2(t^3+9)=t^2+15t \quad \Leftrightarrow \quad 2t^3-t^2-15t+18=0.$$

Vi gissar en rot och ser att $t=2$ uppfyller ekvationen. Polynomdivision visar sedan att

$$2t^3-t^2-15t+18=(t-2)(2t^2+3t-9).$$

Vi finner resterande lösningar till denna ekvation medelst kvadratkomplettering:

$$2t^2+3t-9=0 \quad \Leftrightarrow \quad \left(t+\frac{3}{4}\right)^2=\frac{81}{16} \quad \Leftrightarrow \quad t=-\frac{3}{4}\pm\frac{9}{4}$$

så lösningarna ges av $t=\dfrac{3}{2}$ eller $t=-3$. För $t=\dfrac{3}{2}$ gäller att

$$3^x=\frac{3}{2} \quad \Leftrightarrow \quad x=\frac{\ln(3/2)}{\ln 3}=\frac{\ln 3-\ln 2}{\ln 3}=1-\frac{\ln 2}{\ln 3}$$

och för $t=2$ gäller att

$$3^x=2 \quad \Leftrightarrow \quad x=\frac{\ln 2}{\ln 3},$$

eftersom funktionen $x\mapsto 3^x$ är injektiv. Sambandet $3^x=-3$ saknar lösning eftersom 3^x är positiv för alla reella x.

(b) Vänsterledet är endast definierat för $x < 0$ och för dessa x gäller att

$$\begin{aligned} 4e^{2\ln(-x)} + \ln e^{2x} = 2 \quad &\Leftrightarrow \quad 4(-x)^2 + 2x = 2 \quad \Leftrightarrow \quad x^2 + \frac{1}{2}x = \frac{1}{2} \\ &\Leftrightarrow \quad \left(x + \frac{1}{4}\right)^2 = \frac{9}{16} \quad \Leftrightarrow \quad x = -\frac{1}{4} \pm \frac{3}{4} \end{aligned}$$

så $x = -1$ är den enda lösningen.

Svar: (a) $x = \dfrac{\ln 2}{\ln 3}$ eller $x = 1 - \dfrac{\ln 2}{\ln 3}$ (b) $x = -1$.

3. **Svar**: (a) $x = \dfrac{\pi}{35} + \pi n$, $n \in \mathbf{Z}$, eller $x = -\dfrac{\pi}{35} + \dfrac{\pi n}{6}$, $n \in \mathbf{Z}$

   (b) $D_{\cos} = \mathbf{R}$, $V_{\cos} = [-1, 1]$, $D_{\arccos} = [-1, 1]$, $V_{\arccos} = [0, \pi]$ (c) $\dfrac{1}{3} + i\dfrac{2\sqrt{2}}{3}$.

4. Vi noterar att

$$\cos 7x \, \sin 2x = \cos 5x \, \sin 4x \quad \Leftrightarrow \quad \cos 7x \, \sin 2x = 2\cos 5x \cos 2x \, \sin 2x$$

så endera måste

$$\sin 2x = 0 \quad \Leftrightarrow \quad 2x = n\pi \quad \Leftrightarrow \quad x = \frac{n\pi}{2},$$

där $n \in \mathbf{Z}$, eller så måste

$$\cos 7x = 2\cos 5x \, \cos 2x.$$

En Euler-omskrivning visar att

$$\begin{aligned} 2\cos 5x \, \cos 2x &= 2\left(\frac{e^{i5x} + e^{-i5x}}{2}\right)\left(\frac{e^{i2x} + e^{-i2x}}{2}\right) = \frac{1}{2}\left(e^{i7x} + e^{i3x} + e^{-i3x} + e^{-i7x}\right) \\ &= \cos 7x + \cos 3x, \end{aligned}$$

så

$$\begin{aligned} \cos 7x = 2\cos 5x \, \cos 2x \quad &\Leftrightarrow \quad 0 = \cos 3x \\ &\Leftrightarrow \quad 3x = \pm\frac{\pi}{2} + 2\pi n \quad \Leftrightarrow \quad x = \pm\frac{\pi}{6} + \frac{2\pi n}{3}, \end{aligned}$$

där $n \in \mathbf{Z}$. Alltså kommer lösningarna till ekvationen given i uppgiften att ges av

$$x = \frac{\pi n}{2} \quad \text{eller} \quad x = \pm\frac{\pi}{6} + \frac{2\pi n}{3}.$$

Svar: $x = \dfrac{\pi n}{2}$, $n \in \mathbf{Z}$, eller $x = \pm\dfrac{\pi}{6} + \dfrac{2\pi n}{3}$, $n \in \mathbf{Z}$.

Alternativt: det går bra att använda Euler direkt på både vänster- och högerled, vilket leder till ekvationen

$$\sin 5x = \sin x \quad \Leftrightarrow \quad x = \frac{\pi n}{2} \quad \text{eller} \quad x = \frac{\pi}{6} + \frac{\pi n}{3}.$$

5. Vi formulerar om ekvationen enligt

$$2z^3 + 9\sqrt{3} = 9i \quad \Leftrightarrow \quad z^3 = \frac{9i - 9\sqrt{3}}{2}.$$

Eftersom $|9i - 9\sqrt{3}| = \sqrt{9^2 + (-9\sqrt{3})^2} = 9\sqrt{4} = 18$ så ser vi att

$$\frac{9i - 9\sqrt{3}}{2} = 9\left(\frac{i}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}\right) = 9\left(\cos\frac{5\pi}{6} + i\sin\frac{5\pi}{6}\right) = 9\,e^{i5\pi/6},$$

där vi enklast ser omskrivningen till polär form genom att rita en enhetscirkel (rita en ordentlig figur!). Ekvationen i uppgiften kan således skrivas

$$z^3 = 9\,e^{i5\pi/6}.$$

Låt nu $z = re^{i\varphi}$, där $r \geq 0$ och $\varphi \in \mathbf{R}$. Då måste

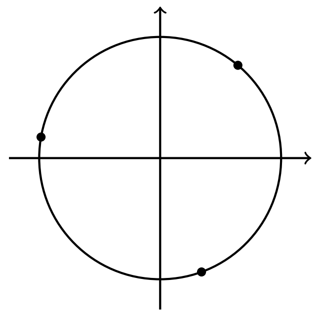
$$z^3 = r^3 e^{i3\varphi} = 9\,e^{i5\pi/6} \quad \Leftrightarrow \quad \begin{cases} r^3 = 9,\ r \geq 0, \\ 3\varphi = \dfrac{5\pi}{6} + 2\pi n,\ n \in \mathbf{Z}. \end{cases} \tag{1}$$

Detta visar att $r = 9^{1/3} = 3^{2/3}$ och $\varphi = \dfrac{5\pi}{18} + \dfrac{2n\pi}{3}$, $n \in \mathbf{Z}$.

Våra lösningar blir nu

$$z = 3^{2/3}\,e^{i\left(\frac{5\pi}{18} + \frac{2n\pi}{3}\right)}, \quad n = 0, 1, 2.$$

Här har vi valt att endast numrera de lösningar som är unika (när $n = 3$ får vi samma lösning som när $n = 0$ etc). Observera dock att för ekvivalensen i ekvation (1) **måste** vi ha $n \in \mathbf{Z}$ godtycklig.



Svar: $z = 3^{2/3}\,e^{i\left(\frac{5\pi}{18} + \frac{2n\pi}{3}\right)}$, $n = 0, 1, 2$.

6. För att $f(x)$ ska vara definierad måste först och främst kräva att

$$-1 \leq 2x \leq 1 \quad \Leftrightarrow \quad -\frac{1}{2} \leq x \leq \frac{1}{2}$$

för att $\arcsin 2x$ ska vara definierad. Om detta gäller så måste dessutom

$$\pi - 3\arcsin 2x \geq 0 \quad \Leftrightarrow \quad \arcsin 2x \leq \frac{\pi}{3} \quad \Leftrightarrow \quad -1 \leq 2x \leq \frac{\sqrt{3}}{2}$$

för att kvadratroten ska vara definierad. Dessa ekvivalenser gäller eftersom $\arcsin 2x$ är strängt växande. Definitionsmängden blir således

$$D_f = \left[-\frac{1}{2}, \frac{\sqrt{3}}{4}\right].$$

För $x \in D_f$ gäller att

$$\begin{aligned} y = \sqrt{\pi - 3\arcsin 2x} \quad &\Rightarrow \quad y^2 = \pi - 3\arcsin 2x \quad \Leftrightarrow \quad \arcsin 2x = \frac{\pi - y^2}{3} \\ &\Rightarrow \quad 2x = \sin\left(\frac{\pi - y^2}{3}\right) \quad \Leftrightarrow \quad x = \frac{1}{2}\sin\left(\frac{\pi - y^2}{3}\right). \end{aligned}$$

Notera särskilt implikationerna ovan. Dessa är **inte** ekvivalenser eftersom vi inte tagit med några villkor på y. Men eftersom vi finner högst en lösning för varje y är f injektiv och ett uttryck för inversen ges av

$$f^{-1}(y) = \frac{1}{2}\sin\left(\frac{\pi - y^2}{3}\right).$$

Svar: $D_f = \left[-\frac{1}{2}, \frac{\sqrt{3}}{4}\right]$; $f^{-1}(y) = \frac{1}{2}\sin\left(\frac{\pi - y^2}{3}\right)$.

7. Eftersom båda ekvationerna är reella kan vi multiplicera den andra ekvationen med i och addera den till den första ekvationen med ekvivalens:

$$\begin{aligned}\cos 3x + \cos 2x - \cos x + \sqrt{3}\,(\sin 2x + \sin x) + i\left(\sin 3x + \sin 2x - \sin x - \sqrt{3}\,(\cos 2x + \cos x)\right) \\ = 1 + 0 \cdot i = 1.\end{aligned}$$

Vi bryter ut $-i$ ur parenteserna som har faktorn $\sqrt{3}$ och använder definitionen av $e^{i\varphi}$, $\varphi \in \mathbf{R}$. Därmed ser vi att ekvationen ovan kan skrivas

$$e^{i3x} + e^{i2x} - e^{ix} - i\sqrt{3}\left(e^{i2x} + e^{ix}\right) = 1.$$

Låt nu $z = e^{ix}$. Då är $|z| = 1$ och vi erhåller polynomekvationen

$$z^3 + z^2 - z - i\sqrt{3}(z^2 + z) = 1 \quad \Leftrightarrow \quad z^3 + (1 - i\sqrt{3})z^2 - (1 + i\sqrt{3})z - 1 = 0$$

till vilken vi kan gissa roten $z = -1$. Polynomdivision visar sedan att

$$z^3 + (1 - i\sqrt{3})z^2 - (1 + i\sqrt{3})z - 1 = (z + 1)\left(z^2 - i\sqrt{3}z - 1\right),$$

så $z = -1$ eller

$$0 = z^2 - i\sqrt{3}z - 1 = \left(z - \frac{i\sqrt{3}}{2}\right)^2 - \frac{1}{4} = \left(z - \frac{1 + i\sqrt{3}}{2}\right)\left(z - \frac{-1 + i\sqrt{3}}{2}\right).$$

Vi har därmed funnit tre olika z, alla med $|z| = 1$, så lösningarna ges av

$$z = -1 \quad \Leftrightarrow \quad e^{ix} = e^{i\pi} \quad \Leftrightarrow \quad x = \pi + 2n\pi,$$

$$z = \frac{1 + i\sqrt{3}}{2} \quad \Leftrightarrow \quad e^{ix} = e^{i\pi/3} \quad \Leftrightarrow \quad x = \frac{\pi}{3} + 2n\pi$$

eller

$$z = \frac{-1 + i\sqrt{3}}{2} \quad \Leftrightarrow \quad e^{ix} = e^{i2\pi/3} \quad \Leftrightarrow \quad x = \frac{2\pi}{3} + 2n\pi.$$

Svar: $x = \pi + 2n\pi$, $n \in \mathbf{Z}$, $x = \frac{\pi}{3} + 2n\pi$, $n \in \mathbf{Z}$, eller $x = \frac{2\pi}{3} + 2n\pi$, $n \in \mathbf{Z}$.