Lösningsförslag TATB01 2024-11-01

1. (a) Vi stuvar om lite i olikheten och finner att

$$\frac{2}{x+1} > \frac{x-1}{2} \quad \Leftrightarrow \quad \frac{4-(x-1)(x+1)}{2(x+1)} > 0$$
$$\Leftrightarrow \quad \frac{-x^2+5}{x+1} > 0 \quad \Leftrightarrow \quad \frac{(x-\sqrt{5})(x+\sqrt{5})}{x+1} < 0$$

där vi nu gör ett teckenschema för det funna uttrycket.

		$-\sqrt{5}$		-1		$\sqrt{5}$	
$x+\sqrt{5}$	$-$	0	$+$		$+$		$+$
$x+1$	$-$		$-$	0	$+$		$+$
$x-\sqrt{5}$	$-$		$-$		$-$	0	$+$
$\dfrac{(x-\sqrt{5})(x+\sqrt{5})}{x+1}$	$-$	0	$+$	☠	$-$	0	$+$

Vi ser ur tabellen att uttrycket är negativt precis då $x < -\sqrt{5}$ eller $-1 < x < \sqrt{5}$.

(b) Polynomdivision (gör den!) visar att

$$\frac{2x^3 - x^2 + x}{x^2+1} = 2x - 1 + \frac{1-x}{x^2+1},$$

så kvoten är $2x-1$ och resten är $1-x$.

(c) Låt $z = x + iy$, $x, y \in \mathbf{R}$. Då gäller att

$$z(z+\overline{z}) = 8+12i \quad \Leftrightarrow \quad (x+iy)(x+iy+x-iy) = 8+12i \quad \Leftrightarrow \quad 2x^2+2xyi = 8+12i,$$

så

$$2x^2 = 8 \quad \Leftrightarrow \quad x = \pm 2$$

och

$$y = 6/x.$$

Därmed finner vi lösningarna $z = 2+3i$ och $z = -2-3i$.

Svar: (a) $x < -\sqrt{5}$ eller $-1 < x < \sqrt{5}$
(b) $\dfrac{2x^3 - x^2 + x}{x^2+1} = 2x - 1 + \dfrac{1-x}{x^2+1}$ där kvoten är $2x-1$ och resten är $1-x$
(c) $z = \pm(2+3i)$.

2. (a) För att samtliga logaritmer ska vara definierade så måste $x < 3/2$ och $x < 3$, det vill säga $x < 3/2$. För $x < 3/2$ så gäller att

$$2\ln(3-2x) - \ln(3-x) + \ln\frac{1}{8} = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \ln\big((3-2x)^2\big) = \ln(8(3-x))$$
$$\Leftrightarrow \quad (3-2x)^2 = 8(3-x)$$
$$\Leftrightarrow \quad 0 = 4x^2 - 4x - 15 = 4\left(\left(x-\frac{1}{2}\right)^2 - 4\right)$$
$$\Leftrightarrow \quad x = \frac{1}{2} \pm 2 \quad \Leftrightarrow \quad x = -3/2 \ \text{ eller } \ x = 5/2$$

eftersom ln är injektiv. Endast $x = -3/2$ uppfyller ekvationen då $5/2 \geq 3/2$.

(b) Eftersom

$$\cos\left(\frac{53\pi}{5}\right) = \cos\left(10\pi + \frac{3\pi}{5}\right) = \cos\left(\frac{3\pi}{5}\right)$$

och $3\pi/5 \in [0, \pi]$ så blir

$$\arccos\left(\cos\left(\frac{53\pi}{5}\right)\right) = \frac{3\pi}{5}.$$

Svar: (a) $x = -\dfrac{3}{2}$ (b) $\dfrac{3\pi}{5}$.

3. **Svar**: (a) $x = \dfrac{\pi}{6} + \dfrac{\pi n}{3}$, $n \in \mathbf{Z}$, eller $x = \dfrac{\pi}{4} + \dfrac{\pi n}{2}$, $n \in \mathbf{Z}$
(b) $e^{ix} = \cos x + i \sin x$ för $x \in \mathbf{R}$
(c) $x = \exp\left(\dfrac{1 \pm \sqrt{5}}{2}\right)$.

4. För att $f(x)$ ska vara definierad måste vi kräva att $t = \dfrac{x-1}{3x+5} > 0$ (för att $\ln t$ ska vara definierad).

Definitionsmängden blir således

$$D_f = \left]-\infty,\, -\frac{5}{3}\right[\,\cup\,]1,\, \infty[.$$

Detta ses enklast genom att göra en ordentlig teckentabell. Tabellen till höger visar att uttrycket är positivt precis då $x < -5/3$ eller $x > 1$.

		$-5/3$		1	
$3x+5$	$-$	0	$+$		$+$
$x-1$	$-$		$-$	0	$+$
$\dfrac{x-1}{3x+5}$	$+$	☠	$-$	0	$+$

För $x \in D_f$ gäller att

$$\begin{aligned} y = \ln\left(\frac{x-1}{3x+5}\right) \quad &\Leftrightarrow \quad e^y = \frac{x-1}{3x+5} \quad \Leftrightarrow \quad (3x+5)e^y = x - 1 \\ &\Leftrightarrow \quad x(3e^y - 1) = -1 - 5e^y \quad \Leftrightarrow \quad x = \frac{-1-5e^y}{3e^y - 1} = \frac{1+5e^y}{1-3e^y}. \end{aligned}$$

Eftersom vi finner exakt en lösning för varje y är f injektiv och ett uttryck för inversen ges av

$$f^{-1}(y) = \frac{1+5e^y}{1-3e^y}.$$

Svar: $D_f = \left]-\infty,\, -\dfrac{5}{3}\right[\cup]1,\, \infty[$; $f^{-1}(y) = \dfrac{1+5e^y}{1-3e^y}$.

5. Två Euler-omskrivningar visar att

$$\begin{aligned} \sin 5x \cos 3x &= \left(\frac{e^{i5x} - e^{-i5x}}{2i}\right)\left(\frac{e^{i3x} + e^{-i3x}}{2}\right) = \frac{1}{4i}\left(e^{i8x} + e^{i2x} - e^{-i2x} - e^{-i8x}\right) \\ &= \frac{1}{2}\left(\sin 8x + \sin 2x\right) \end{aligned}$$

och

$$\sin 7x \sin 9x = \left(\frac{e^{i7x} - e^{-i7x}}{2i}\right)\left(\frac{e^{i9x} - e^{-i9x}}{2i}\right) = -\frac{1}{4}\left(e^{i16x} - e^{-i2x} - e^{i2x} + e^{-i16x}\right)$$
$$= -\frac{1}{2}\left(\cos 16x - \cos 2x\right).$$

Alltså gäller att

$$\sin 5x \cos 3x + \sin 7x \sin 9x = \frac{1}{2}\left(\sin 8x + \sin 2x - \cos 16x + \cos 2x\right).$$

Vänsterledet i ekvationen given i uppgiften kan därmed ekvivalent skrivas om enligt

$$2\sin 5x \cos 3x + 2\sin 7x \sin 9x = \sin 8x + \sin 2x - \cos 16x + \cos 2x.$$

Vi noterar att högerledet i ekvationen med en additionsformel kan skrivas om enligt

$$\sqrt{2}\sin\left(2x + \frac{\pi}{4}\right) = \sqrt{2}\left(\cos\frac{\pi}{4}\sin 2x + \sin\frac{\pi}{4}\cos 2x\right) = \sin 2x + \cos 2x,$$

så ekvationen kan därför ekvivalent formuleras som

$$\begin{aligned}
&\sin 8x + \sin 2x - \cos 16x + \cos 2x = \sin 2x + \cos 2x \quad \Leftrightarrow \quad \sin 8x = \cos 16x \\
&\Leftrightarrow \quad \cos\left(\frac{\pi}{2} - 8x\right) = \cos 16x \quad \Leftrightarrow \quad 16x = \pm\left(\frac{\pi}{2} - 8x\right) + 2\pi n \\
&\Leftrightarrow \quad x = \frac{\pi}{48} + \frac{\pi n}{12} \quad \text{eller} \quad x = -\frac{\pi}{16} + \frac{\pi n}{4},
\end{aligned}$$

där $n \in \mathbf{Z}$.

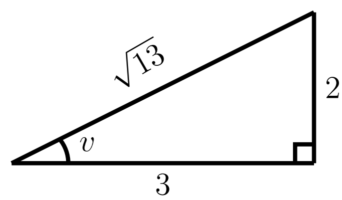
Svar: $\frac{1}{2}\left(\sin 8x + \sin 2x + \cos 2x - \cos 16x\right)$;
$x = \frac{\pi}{48} + \frac{\pi n}{12}$, $n \in \mathbf{Z}$, eller $x = -\frac{\pi}{16} + \frac{\pi n}{4}$, $n \in \mathbf{Z}$.

6. Låt $\alpha = \beta - \gamma$, där $\beta = \arctan\frac{1}{5}$ och $\gamma = \arccos\left(-\frac{3}{\sqrt{13}}\right)$. Då gäller enligt känd additionsformel för tangens att

$$\tan\alpha = \frac{\tan\beta - \tan\gamma}{1 + \tan\beta\tan\gamma} = \frac{\frac{1}{5} - \tan\gamma}{1 + \frac{1}{5}\tan\gamma}.$$

Eftersom $v = \pi - \arccos\left(\frac{-3}{\sqrt{13}}\right)$ medför att $0 < v < \pi/2$
och $\cos v = 3/\sqrt{13}$, så vi ser direkt ur en hjälptriangel att

$$\tan v = \frac{2}{3}$$



och därmed blir

$$\tan\left(\arccos\left(\frac{-3}{\sqrt{13}}\right)\right) = \tan(\pi - v) = -\tan v = -\frac{2}{3}.$$

Således erhåller vi att

$$\tan\alpha = \tan\left(\arctan\frac{1}{5} - \arccos\left(-\frac{3}{\sqrt{13}}\right)\right) = \frac{\frac{1}{5} - \left(-\frac{2}{3}\right)}{1 + \frac{1}{5}\cdot\left(-\frac{2}{3}\right)} = 1.$$

Eftersom

$$\tan\alpha = 1 \quad \Leftrightarrow \quad \alpha = \frac{\pi}{4} + n\pi,\ n \in \mathbf{Z},$$

så måste

$$\alpha = \arctan\frac{1}{5} - \arccos\left(-\frac{3}{\sqrt{13}}\right) = \frac{\pi}{4} + n\pi$$

för något heltal n. Vi uppskattar storleken på ingående arcusfunktioner:

$$0 < \arctan\frac{1}{5} < \frac{\pi}{2}$$

och

$$\frac{\pi}{2} < \arccos\left(\frac{-3}{\sqrt{13}}\right) < \pi.$$

Alltså gäller

$$-\pi = 0 - \pi < \alpha < \frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{2} = 0$$

så det följer att $n = -1$ är nödvändigt. Sålunda blir

$$\alpha = \frac{\pi}{4} - \pi = -\frac{3\pi}{4}.$$

Svar: $-\dfrac{3\pi}{4}$

7. Alla $x > 0$ med $x \neq 1$ uppfyller att

$$\frac{x-1}{x} < \ln x < x - 1$$

enligt kända olikheter för den naturliga logaritmen. Om vi låter $t = x - 1$ så följer det att

$$\frac{t}{1+t} < \ln(1+t) < t, \quad t > -1 \text{ med } t \neq 0.$$

Därmed gäller att

$$\sum_{k=1}^{n} \ln(1 + e^{-k}) < \sum_{k=1}^{n} e^{-k} = e^{-1}\cdot\frac{1 - e^{-n}}{1 - e^{-1}} = \frac{1 - e^{-n}}{e - 1}$$

eftersom den överskattande summan är geometrisk med n termer, kvoten e^{-1} och första term e^{-1}. Detta medför att

$$(e-1)\sum_{k=1}^{n} \ln(1 + e^{-k}) < 1 - e^{-n} < 1, \quad n = 1, 2, 3, \ldots$$

Då termerna i summan är positiva följer att summan alltid är större än eller lika med första termen. Detta ger att

$$(e-1)\sum_{k=1}^{n}\ln(1+e^{-k}) \geq (e-1)\ln(1+e^{-1}) > (e-1)\frac{e^{-1}}{1+e^{-1}} = \frac{e-1}{e+1} > \frac{1}{4}$$

eftersom $2 < e < 3$. Man kan även notera att den undre gränsen är oberoende av n, så det måste räcka att enbart ta med den första termen om olikheten ska gälla för alla $n = 1, 2, 3, \ldots$

Svar: se ovan.

Anmärkning. Man kan även visa den undre skattningen analogt med hur den övre hanteras. Det gäller att

$$\sum_{k=1}^{n}\ln(1+e^{-k}) > \sum_{k=1}^{n}\frac{e^{-k}}{1+e^{-k}} > \sum_{k=1}^{n}\frac{e^{-k}}{2} = \frac{e^{-1}}{2}\cdot\frac{1-e^{-n}}{1-e^{-1}} = \frac{1}{2}\cdot\frac{1-e^{-n}}{e-1}$$

där vi även utnyttjat att $1 + e^{-k} < 2$ för $k = 1, 2, \ldots$, ur vilket det följer att

$$(e-1)\sum_{k=1}^{n}\ln(1+e^{-k}) > \frac{1}{2}\left(1-e^{-n}\right) > \frac{1}{2}\left(1-\frac{1}{2}\right) = \frac{1}{4}$$

eftersom $-e^{-n} > -e^{-1} = -\dfrac{1}{e} > -\dfrac{1}{2}$ då $e > 2$.