# Lösningsförslag TATB01 2025-09-29

1. (a) Vi stuvar om lite i olikheten och finner att

$$\frac{1-5x}{x+1} < 2(x-1) \;\Leftrightarrow\; \frac{2(x-1)(x+1)-(1-5x)}{x+1} > 0 \;\Leftrightarrow\; \frac{2x^2+5x-3}{x+1} > 0.$$

Kvadratkomplettering och konjugatregeln visar att

$$2x^2+5x-3 = 2\left(\left(x+\frac{5}{4}\right)^2 - \frac{49}{16}\right) = 2(x-1/2)(x+3) = (2x-1)(x+3).$$

Vi söker nu de $x$ så att

$$\frac{2x^2+5x-3}{x+1} = \frac{(2x-1)(x+3)}{x+1} > 0.$$

Vi gör ett teckenschema för detta uttryck.

| | | $-3$ | | $-1$ | | $1/2$ | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $x+3$ | $-$ | $0$ | $+$ | | $+$ | | $+$ |
| $x+1$ | $-$ | | $-$ | $0$ | $+$ | | $+$ |
| $2x-1$ | $-$ | | $-$ | | $-$ | $0$ | $+$ |
| $\dfrac{(2x-1)(x+3)}{x+1}$ | $-$ | $0$ | $+$ | ☠ | $-$ | $0$ | $+$ |

Vi ser ur tabellen att uttrycket är positivt precis då $-3 < x < -1$ eller $x > 1/2$.

(b) Vi ser att summan är geometrisk med $30-(-30)+1 = 61$ termer, kvoten 5 och första term $4 \cdot 5^{-31}$, så

$$\sum_{k=-30}^{30} 4\cdot 5^{k-1} = 4\cdot 5^{-31}\cdot \frac{5^{61}-1}{5-1} = 5^{-31}\left(5^{61}-1\right) = 5^{30}-5^{-31}.$$

**Svar**: (a) $-3 < x < -1$ eller $x > 1/2$ (b) $5^{30}-5^{-31}$.

2. För att samtliga logaritmer ska vara definierade så måste $x > 0$ och $3-x > 0$, det vill säga $0 < x < 3$. För $0 < x < 3$ så gäller att

$$\begin{aligned}
\ln 2 - 2\ln x - \ln(3-x) = 0 \quad &\Leftrightarrow \quad \ln\left(\frac{2}{x^2}\right) = \ln(3-x)\\
&\Leftrightarrow \quad \frac{2}{x^2} = 3-x\\
&\Leftrightarrow \quad x^3-3x^2+2 = 0,
\end{aligned}$$

eftersom ln är injektiv. Vi ser att $x=1$ är en lösning och därmed är $x-1$ en faktor i $x^3-3x^2+2$. Polynomdivision (gör den!) visar sedan att $x^3-3x^2+2 = (x-1)(x^2-2x-2)$. Vi undersöker när den andra faktorn i högerledet blir noll:

$$x^2-2x-2 = 0 \quad\Leftrightarrow\quad (x-1)^2 = 3 \quad\Leftrightarrow\quad x = 1-\sqrt{3} \text{ eller } x = 1+\sqrt{3}.$$

Av $x=1$, $x=1-\sqrt{3}$ och $x=1+\sqrt{3}$ uppfyller $x=1$ och $x=1+\sqrt{3}$ kravet att $0<x<3$.

**Svar**: $x=1$ eller $x=1+\sqrt{3}$.

3. (a) Enligt definition är $v = \arccos(1/4) \in ]0, \pi[$, så $\sin v > 0$ och därmed blir

$$\sin v = \sqrt{1 - \cos^2 v} = \sqrt{1 - 1/16} = \frac{\sqrt{15}}{4}.$$

Alternativt går det bra att rita en rätvinklig triangel eftersom $0 < \arccos(1/4) < \pi/2$.

(b) Den kända formeln $\cos 2x = 2\cos^2 x - 1$ visar att

$$\begin{aligned} 2\cos 2x + 8\cos x + 5 = 0 \quad &\Leftrightarrow \quad 2(2\cos^2 x - 1) + 8\cos x + 5 = 0 \\ &\Leftrightarrow \quad \cos^2 x + 2\cos x + \frac{3}{4} = 0 \\ &\Leftrightarrow \quad (1 + \cos x)^2 = \frac{1}{4} \quad \Leftrightarrow \quad \cos x = -1 \pm \frac{1}{2} \\ &\Leftrightarrow \quad \cos x = -\frac{1}{2} \quad \text{eller} \quad \cos x = -\frac{3}{2}. \end{aligned}$$

Eftersom $-3/2 \notin [-1, 1]$ så ger endast

$$\cos x = -\frac{1}{2} \quad \Leftrightarrow \quad x = \pm\frac{2\pi}{3} + 2\pi n, \quad n \in \mathbf{Z},$$

lösningar till ekvationen.

**Svar**: (a) $\dfrac{\sqrt{15}}{4}$ (b) $\pm\dfrac{2\pi}{3} + 2\pi n, \quad n \in \mathbf{Z}.$

4. För att $f(x)$ ska vara definierad måste vi kräva att $t = \dfrac{2 - e^x}{e^x - 7} > 0$ (för att $\ln t$ ska vara definierad).

Definitionsmängden blir således

$$2 < e^x < 7 \quad \Leftrightarrow \quad \ln 2 < x < \ln 7$$

eftersom ln är strängt växande. Vi ser enklast detta intervall genom att göra en ordentlig teckentabell. Låt $s = e^x$. Tabellen till höger visar att bråket är positivt precis då $2 < s < 7$.

| | | 2 | | 7 | |
|---|---|---|---|---|---|
| $2-s$ | + | 0 | − | | − |
| $s-7$ | − | | − | 0 | + |
| $\dfrac{2-s}{s-7}$ | − | 0 | + | ☠ | − |

Så $D_f = \big]\ln 2, \ln 7\big[$ och för $x \in D_f$ gäller att

$$\begin{aligned} y = \ln\left(\frac{2 - e^x}{e^x - 7}\right) \quad &\Leftrightarrow \quad e^y = \frac{2 - e^x}{e^x - 7} \quad \Leftrightarrow \quad (e^x - 7)e^y = 2 - e^x \\ &\Leftrightarrow \quad e^x(e^y + 1) = 2 + 7e^y \quad \Leftrightarrow \quad e^x = \frac{2 + 7e^y}{1 + e^y} \\ &\Leftrightarrow \quad x = \ln\left(\frac{2 + 7e^y}{1 + e^y}\right), \end{aligned}$$

där vi utnyttjat att ln är injektiv. Eftersom vi finner exakt en lösning för varje $y$ är även $f$ injektiv och ett uttryck för inversen ges av

$$f^{-1}(y) = \ln\left(\frac{2 + 7e^y}{1 + e^y}\right).$$

**Svar**: $D_f = \big]\ln 2, \ln 7\big[$; $f^{-1}(y) = \ln\left(\dfrac{2 + 7e^y}{1 + e^y}\right)$.

5. (a) Ekvationen kan skrivas om enligt

$$4z^2 - 16iz - 13 + 4i = 0 \quad \Leftrightarrow \quad z^2 - 4iz - \frac{13}{4} + i = 0.$$

Vi kvadratkompletterar vänsterledet för att få en enklare ekvation att hantera:

$$\begin{aligned} z^2 - 4iz - \frac{13}{4} + i = 0 \quad &\Leftrightarrow \quad (z-2i)^2 - (-2i)^2 - \frac{13}{4} + i = 0 \\ &\Leftrightarrow \quad (z-2i)^2 = -\frac{3}{4} - i. \end{aligned}$$

Låt $z - 2i = x + iy$ där $x,\, y \in \mathbf{R}$. Vi söker nu alla lösningar till

$$(x+iy)^2 = -\frac{3}{4} - i. \tag{$\dagger$}$$

Då gäller att

$$x^2 + 2ixy - y^2 = -\frac{3}{4} - i \quad \Leftrightarrow \quad \begin{cases} x^2 - y^2 = -3/4, \\ \quad\quad xy = -1/2. \end{cases}$$

Vidare följer det av (†) att

$$x^2 + y^2 = \left| -\frac{3}{4} - i \right| = \sqrt{\frac{9+16}{16}} = \frac{5}{4}.$$

Härur kan vi till exempel se att

$$(x^2 - y^2) + (x^2 + y^2) = -\frac{3}{4} + \frac{5}{4} = \frac{1}{2} \quad \Leftrightarrow \quad 2x^2 = \frac{1}{2} \quad \Leftrightarrow \quad x = \pm\frac{1}{2}.$$

Eftersom $y = -\dfrac{1}{2x}$ så erhåller vi lösningarna

$$z = x + iy + 2i = \pm\left(\frac{1}{2} - i\right) + 2i \quad \Leftrightarrow \quad z = \frac{1}{2} + i \quad \text{eller} \quad z = -\frac{1}{2} + 3i.$$

(b) Enligt definitionen av $e^{i\varphi}$, $\varphi \in \mathbf{R}$, följer det att

$$\begin{aligned} e^{ix}e^{iy} &= \big(\cos x + i\sin x\big)\big(\cos y + i \sin y\big) \\ &= \cos x \cos y - \sin x \sin y + i\big(\sin x \cos y + \cos x \sin y\big) \\ &= \cos(x+y) + i\sin(x+y) = e^{i(x+y)}. \end{aligned}$$

I det näst sista steget utnyttjade vi additionsformler för $\cos(x+y)$ och $\sin(x+y)$.

**Svar**: (a) $z = \dfrac{1}{2} + i$ eller $z = -\dfrac{1}{2} + 3i$ (b) se ovan.

6. Tre Euler-omskrivningar visar att

$$\begin{aligned} 4\sin 2x \sin 3x \sin 5x &= 4\left(\frac{e^{i2x} - e^{-i2x}}{2i}\right)\left(\frac{e^{i3x} - e^{-i3x}}{2i}\right)\left(\frac{e^{i5x} - e^{-i5x}}{2i}\right) \\ &= -\frac{1}{2i}\left(e^{i5x} - e^{-ix} - e^{ix} + e^{-i5x}\right)\left(e^{i5x} - e^{-i5x}\right) \\ &= -\frac{1}{2i}\left(e^{i10x} - 1 - e^{i4x} + e^{-i6x} - e^{i6x} + e^{-i4x} + 1 - e^{-i10x}\right) \\ &= -\left(\sin 10x - \sin 4x - \sin 6x\right). \end{aligned}$$

Alltså gäller att

$$\begin{aligned} 4\sin 2x \sin 3x \sin 5x = \sin 6x \quad &\Leftrightarrow \quad \sin 10x = \sin 4x \\ &\Leftrightarrow \quad 10x = 4x + 2n\pi \text{ eller } 10x = \pi - 4x + 2n\pi, \end{aligned}$$

där $n \in \mathbf{Z}$. Vi finner alltså lösningarna

$$10x = 4x + 2n\pi \quad \Leftrightarrow \quad x = \frac{2n\pi}{6} = \frac{n\pi}{3}$$

eller

$$10x = \pi - 4x + 2n\pi \quad \Leftrightarrow \quad x = \frac{\pi}{14} + \frac{2n\pi}{14} = \frac{\pi}{14} + \frac{n\pi}{7}.$$

**Svar**: $x = \dfrac{n\pi}{3}$, $n \in \mathbf{Z}$, eller $x = \dfrac{\pi}{14} + \dfrac{n\pi}{7}$, $n \in \mathbf{Z}$.

7. Notera att

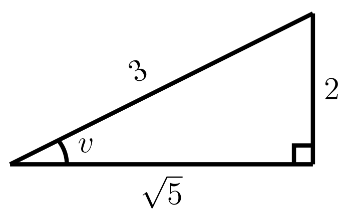
$$\begin{aligned} \alpha &= \arcsin\left(-\frac{2}{3}\right) - \arctan\sqrt{5} = -\arcsin\frac{2}{3} - \arctan\sqrt{5} \\ &= -\left(\arcsin\frac{2}{3} + \arctan\sqrt{5}\right), \end{aligned}$$

så vi låter $\beta = -\alpha$. Då gäller enligt känd additionsformel för tangens att

$$\tan\beta = \frac{\tan\left(\arcsin\frac{2}{3}\right) + \sqrt{5}}{1 - \sqrt{5}\tan\left(\arcsin\frac{2}{3}\right)}.$$

Eftersom $v = \arcsin\dfrac{2}{3}$ medför att $0 < v < \dfrac{\pi}{2}$ och $\sin v = \dfrac{2}{3}$, så vi ser direkt ur en hjälptriangel att

$$\tan v = \frac{2}{\sqrt{5}}.$$




Således erhåller vi att

$$\tan\alpha = \tan(-\beta) = -\tan\beta = -\frac{\dfrac{2}{\sqrt{5}} + \sqrt{5}}{1 - \dfrac{2}{\sqrt{5}}\cdot\sqrt{5}} = \frac{2}{\sqrt{5}} + \sqrt{5} = \frac{7\sqrt{5}}{5}.$$

Eftersom

$$\tan\alpha = \frac{7\sqrt{5}}{5} \quad \Leftrightarrow \quad \alpha = \arctan\frac{7\sqrt{5}}{5} + n\pi,\ n \in \mathbf{Z},$$

så måste $\alpha = \arctan\dfrac{7\sqrt{5}}{5} + n\pi$ för något heltal $n$ (det finns endast **ett** svar). Vi uppskattar storleken på ingående arcusfunktioner:

$$0 < \arctan\sqrt{5} < \arctan\frac{7\sqrt{5}}{5} < \frac{\pi}{2}$$

och

$$-\frac{\pi}{2} < \arcsin\left(-\frac{2}{3}\right) < 0.$$

Alltså gäller

$$-\pi = -\frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{2} < \alpha < 0,$$

så det följer att $n = -1$ är nödvändigt. Sålunda blir

$$\alpha = \arctan \frac{7\sqrt{5}}{5} - \pi.$$

**Svar**: $\alpha = \arctan \dfrac{7\sqrt{5}}{5} - \pi.$