

Lösningsförslag TATB01 2025-10-31

1. (a) Vi kvadratkompletterar uttrycket och finner att

$$\begin{aligned} f(x) &= 4x - 5 - 3x^2 = -3 \left(x^2 - \frac{4}{3}x + \frac{5}{3} \right) = -3 \left(\left(x - \frac{2}{3} \right)^2 - \frac{4}{9} + \frac{5}{3} \right) \\ &= \underbrace{-3 \left(x - \frac{2}{3} \right)^2}_{\leq 0} - \frac{11}{3} \end{aligned}$$

så maximum inträffar då $x = \frac{2}{3}$ och största värdet är $-\frac{11}{3}$.

- (b) Vi ser att summan är geometrisk med $100 - 3 + 1 = 98$ termer, kvoten $\frac{1}{4}$ och första term $\frac{4}{2^6} = \frac{1}{16}$, så

$$\sum_{k=3}^{100} \frac{4}{2^{2k}} = \frac{1}{16} \cdot \frac{1 - \left(\frac{1}{4}\right)^{98}}{1 - \frac{1}{4}} = \frac{1}{16} \cdot \frac{4}{3} (1 - 4^{-98}) = \frac{1}{12} (1 - 2^{-196}).$$

- (c) Låt $z = x + iy$, $x, y \in \mathbf{R}$. Då gäller att den givna ekvationen är ekvivalent med

$$(3 + i)(x + iy) + 5(x - iy) = 3 + y \quad \Leftrightarrow \quad 8x - y + i(x - 2y) = 3 + y$$

så likhet gäller om och endast om

$$8x - y = 3 + y \quad \text{och} \quad x - 2y = 0.$$

Därmed blir $8x - 2y = 3$ och $x = 2y$, ur vilket det följer att $x = \frac{3}{7}$ och $y = \frac{3}{14}$,
så $z = \frac{3}{7} + \frac{3i}{14}$.

Svar: (a) $-\frac{11}{3}$ (b) $\frac{1}{12} (1 - 2^{-196})$ (c) $z = \frac{3}{7} + \frac{3i}{14}$.

2. Först skriver vi om olikheten för att få något som är enklare att studera. Eftersom

$$x^2 + 4x + 3 = (x + 2)^2 - 1 = (x + 3)(x + 1)$$

så ser vi att

$$\begin{aligned} \frac{4 - x^2}{x^2 + 4x + 3} \leq \frac{x - 2}{x + 3} &\Leftrightarrow \frac{4 - x^2}{(x + 1)(x + 3)} \leq \frac{x - 2}{x + 3} \\ &\Leftrightarrow 0 \leq \frac{(x - 2)(x + 1) + x^2 - 4}{(x + 1)(x + 3)} = \frac{2x^2 - x - 6}{(x + 1)(x + 3)}. \end{aligned}$$

Vi kvadratkompletterar täljaren och faktorerisar:

$$2x^2 - x - 6 = 2 \left(\left(x - \frac{1}{4} \right)^2 - \frac{49}{16} \right) = 2 \left(x + \frac{3}{2} \right) (x - 2) = (2x + 3) (x - 2),$$

så

$$\frac{2x^2 - x - 6}{(x + 1)(x + 3)} \geq 0 \quad \Leftrightarrow \quad \frac{(2x + 3)(x - 2)}{(x + 1)(x + 3)} \geq 0.$$

Vi gör ett teckenschema för det funna bråket ovan.

	-3	$-\frac{3}{2}$	-1	2
$x+3$	-	0	+	+
$2x+3$	-	-	0	+
$x+1$	-	-	-	0
$x-2$	-	-	-	-
$\frac{(2x+3)(x-2)}{(x+1)(x+3)}$	+	☠	-	0

Tabellen visar att uttrycket är icke-negativt precis då $x < -3$, $-\frac{3}{2} \leq x < -1$ eller $x \geq 2$.

Svar: $x < -3$, $-\frac{3}{2} \leq x < -1$ eller $x \geq 2$.

3. (a) Vi ser direkt ur enhetscirkeln att

$$\cos(3x-1) = \cos(2x-5) \Leftrightarrow 3x-1 = \pm(2x-5) + 2\pi n, \quad n \in \mathbf{Z},$$

så

$$x = -4 + 2\pi n$$

eller

$$5x = 6 + 2\pi n \Leftrightarrow x = \frac{6}{5} + \frac{2\pi n}{5}.$$

(b) Vi har $D_{\cos} = \mathbf{R}$, $V_{\cos} = [-1, 1]$, $D_{\arccos} = [-1, 1]$ och $V_{\arccos} = [0, \pi]$.

(c) Enligt definition är $v = \arccos(-1/4) \in]0, \pi[$, så $\sin v > 0$ och trig-ettan ger därmed bara den positiva lösningen

$$\sin v = \sqrt{1 - \cos^2 v} = \sqrt{1 - 1/16} = \frac{\sqrt{15}}{4}.$$

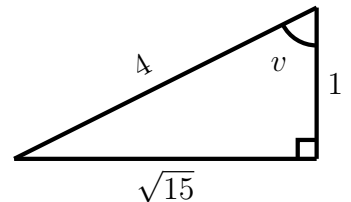
Alternativt, eftersom $\pi/2 < \arccos(-1/4) < \pi$, så låter vi $v = \pi - \arccos\left(-\frac{1}{4}\right)$.

Vi har nu att $0 < v < \pi/2$ och $\cos v = 1/4$, så vi ser direkt ur en hjälptriangel att

$$\sin v = \frac{\sqrt{4^2 - 1^2}}{4} = \frac{\sqrt{15}}{4}$$

och därmed blir

$$\sin\left(\arccos\left(-\frac{1}{4}\right)\right) = \sin(\pi - v) = \sin v = \frac{\sqrt{15}}{4}.$$



Svar: (a) $x = -4 + 2\pi n$, $n \in \mathbf{Z}$, eller $x = \frac{6}{5} + \frac{2\pi n}{5}$, $n \in \mathbf{Z}$ (b) se ovan (b) $\frac{\sqrt{15}}{4}$.

4. Ekvationen kan formuleras om enligt

$$8^x - 4^{x+1} - 3 \cdot 2^{x+2} + 2^5 = 0 \Leftrightarrow (2^x)^3 - 4 \cdot (2^x)^2 - 12 \cdot 2^x + 32 = 0.$$

Vi låter $t = 2^x > 0$ och löser ekvationen

$$t^3 - 4t^2 - 12t + 32 = 0$$

genom att först testa fram en rot. Exempelvis $t = 2$ är en lösning. Polynomdivision med $t - 2$ (utför den!) visar sedan att

$$t^3 - 4t^2 - 12t + 32 = (t - 2)(t^2 - 2t - 16).$$

Kvadratkomplettering av den andra faktorn i högerledet visar att

$$t^2 - 2t - 16 = (t - 1)^2 - 17 = 0 \quad \Leftrightarrow \quad t = 1 \pm \sqrt{17} \quad \Leftrightarrow \quad t = 1 + \sqrt{17} \text{ eller } t = 1 - \sqrt{17}.$$

Eftersom $t > 0$ så kan inte $t = 1 - \sqrt{17}$ vara en lösning. Däremot är

$$t = 2^x = 2 \quad \Leftrightarrow \quad x = 1$$

och

$$t = 2^x = 1 + \sqrt{17} \quad \Leftrightarrow \quad x = \frac{\ln(1 + \sqrt{17})}{\ln 2}$$

lösningar (där vi har ekvivalenser eftersom $x \mapsto 2^x$ är injektiv).

Svar: $x = 1$ eller $x = \frac{\ln(1 + \sqrt{17})}{\ln 2}$.

5. För att $f(x)$ ska vara definierad måste vi kräva att $t = \frac{3x - 2}{4x - 3} \geq 0$ (för att $\sqrt{t}$ ska vara definierad).

Definitionsmängden blir således

$$D_f = \left] -\infty, \frac{2}{3} \right] \cup \left] \frac{3}{4}, \infty \right[.$$

Detta ses enklast genom att göra en ordentlig teckentabell. Tabellen till höger visar att uttrycket är icke-negativt precis då $x \leq 2/3$ eller $x > 3/4$.

	$\frac{2}{3}$		$\frac{3}{4}$	
$3x - 2$	-	0	+	+
$4x - 3$	-		-	0
$\frac{3x - 2}{4x - 3}$	+	0	-	+

För $x \in D_f$ gäller att

$$\begin{aligned} y = \sqrt{\frac{3x - 2}{4x - 3}} &\Rightarrow y^2 = \frac{3x - 2}{4x - 3} \Leftrightarrow (4x - 3)y^2 = 3x - 2 \\ &\Leftrightarrow x(4y^2 - 3) = 3y^2 - 2 \Leftrightarrow x = \frac{3y^2 - 2}{4y^2 - 3}. \end{aligned}$$

Eftersom vi finner högst en lösning för varje y är f injektiv och ett uttryck för inversen ges av

$$f^{-1}(y) = \frac{3y^2 - 2}{4y^2 - 3}.$$

Notera att vi endast har en implikation vid kvadreringen ovan. Vill vi skriva ekvivalens måste vi ha med villkoret att $y \geq 0$.

Svar: $D_f = \left] -\infty, \frac{2}{3} \right] \cup \left] \frac{3}{4}, \infty \right[; f^{-1}(y) = \frac{3y^2 - 2}{4y^2 - 3}.$

6. (a) Ekvationen i uppgiften kan skrivas

$$z^8 + 8 = 0 \quad \Leftrightarrow \quad z^8 = -8 = 8e^{i\pi},$$

där vi skrivit högerledet på polär form. Låt nu $z = re^{i\varphi}$, där $r \geq 0$ och $\varphi \in \mathbf{R}$. Då måste

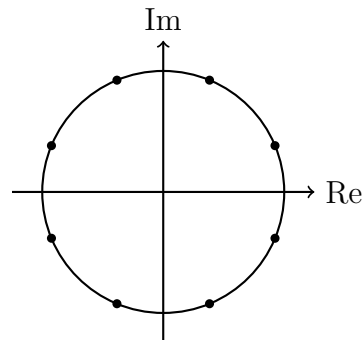
$$z^8 = r^8 e^{i8\varphi} = 8e^{i\pi} \quad \Leftrightarrow \quad \begin{cases} r^8 = 8, & r \geq 0, \\ 8\varphi = \pi + 2\pi n, & n \in \mathbf{Z}. \end{cases} \quad (1)$$

Detta visar att $r = 8^{1/8} = 2^{3/8}$ och $\varphi = \frac{\pi}{8} + \frac{n\pi}{4}$, $n \in \mathbf{Z}$.

Våra lösningar blir nu

$$z = 2^{3/8} e^{i(\frac{\pi}{8} + \frac{n\pi}{4})}, \quad n = 0, 1, 2, \dots, 7.$$

Här har vi valt att endast numrera de lösningar som är unika (när $n = 8$ får vi samma lösning som när $n = 0$ etc). Observera dock att för ekvivalensen i ekvation (1) **måste** vi ha $n \in \mathbf{Z}$ godtycklig.



- (b) Ur definitionen följer det att

$$\begin{aligned} \cosh 2x = 3 &\Leftrightarrow \frac{e^{2x} + e^{-2x}}{2} = 3 \Leftrightarrow e^{2x} + e^{-2x} = 6 \\ &\Leftrightarrow e^{4x} - 6e^{2x} + 1 = 0 \Leftrightarrow (e^{2x} - 3)^2 = 8 \\ &\Leftrightarrow e^{2x} = 3 \pm \sqrt{8} \Leftrightarrow 2x = \ln(3 \pm \sqrt{8}), \end{aligned}$$

så $x = \frac{1}{2} \ln(3 \pm \sqrt{8})$. Notera att $3 - \sqrt{8} > 3 - \sqrt{9} = 0$. Vi observerar även att

$$\ln(3 - \sqrt{8}) = \ln\left(\frac{1}{3 + \sqrt{8}}\right) = -\ln(3 + \sqrt{8}),$$

så lösningarna kan skrivas

$$x = \pm \frac{1}{2} \ln(3 + \sqrt{8}),$$

vilket visar på symmetrin kring y -axeln (hur ser grafen för $\cosh$ ut?).

Svar: (a) $z = 2^{3/8} e^{i(\frac{\pi}{8} + \frac{n\pi}{4})}$, $n = 0, 1, \dots, 7$ (b) $x = \frac{1}{2} \ln(3 \pm \sqrt{8}) = \pm \frac{1}{2} \ln(3 + \sqrt{8})$.

7. Vi använder oss av hjälpvinkelmetoden och skriver om vänsterledet enligt

$$\sqrt{2} \cos 5x - \sqrt{6} \sin 5x = C \sin(5x + \psi),$$

med $C > 0$ och $\psi \in \mathbf{R}$. Då ska alltså, enligt additionsformeln för sinus,

$$C \sin(5x + \psi) = C (\sin 5x \cos \psi + \cos 5x \sin \psi) = \sqrt{2} \cos 5x - \sqrt{6} \sin 5x.$$

Genom att, till exempel, låta $x = 0$ och $x = \pi/10$, erhåller vi sambanden

$$\begin{cases} C \sin \psi &= \sqrt{2}, \\ C \cos \psi &= -\sqrt{6}. \end{cases}$$

För att bestämma C kvadrerar vi dessa ekvationer och summerar för att finna att

$$C^2 = C^2(\sin^2 \psi + \cos^2 \psi) = (\sqrt{2})^2 + (-\sqrt{6})^2 = 8.$$

Alltså är $C = \sqrt{8} = 2\sqrt{2}$ och vi finner ψ genom att lösa

$$\begin{cases} \cos \psi &= -\frac{\sqrt{6}}{2\sqrt{2}} = -\frac{\sqrt{3}}{2}, \\ \sin \psi &= \frac{\sqrt{2}}{2\sqrt{2}} = \frac{1}{2} \end{cases} \quad \Leftrightarrow \quad \psi = \frac{5\pi}{6} + 2m\pi, \quad m \in \mathbf{Z}.$$

Rita en enhetscirkel för att se detta! Vi väljer $\psi = \frac{5\pi}{6}$.

Därmed kan vi säga att

$$\begin{aligned} \sqrt{2} \cos 5x - \sqrt{6} \sin 5x = 1 &\Leftrightarrow 2\sqrt{2} \sin \left(5x + \frac{5\pi}{6} \right) = 1 \\ &\Leftrightarrow \sin \left(x + \frac{5\pi}{6} \right) = \frac{1}{2\sqrt{2}} \\ &\Leftrightarrow \begin{cases} 5x + \frac{5\pi}{6} = \arcsin \frac{1}{2\sqrt{2}} + 2\pi n, \quad n \in \mathbf{Z}, \\ \text{eller} \\ 5x + \frac{5\pi}{6} = \pi - \arcsin \frac{1}{2\sqrt{2}} + 2\pi n, \quad n \in \mathbf{Z}. \end{cases} \end{aligned}$$

Alltså blir

$$5x = -\frac{5\pi}{6} + \arcsin \frac{1}{2\sqrt{2}} + 2\pi n \quad \Leftrightarrow \quad x = -\frac{\pi}{6} + \frac{1}{5} \arcsin \frac{1}{2\sqrt{2}} + \frac{2\pi n}{5}$$

eller

$$5x = \pi - \frac{5\pi}{6} - \arcsin \frac{1}{2\sqrt{2}} + 2\pi n \quad \Leftrightarrow \quad x = \frac{\pi}{30} - \frac{1}{5} \arcsin \frac{1}{2\sqrt{2}} + \frac{2\pi n}{5}.$$

Svar: $x = -\frac{\pi}{6} + \frac{1}{5} \arcsin \frac{1}{2\sqrt{2}} + \frac{2\pi n}{5}, \quad n \in \mathbf{Z},$ eller $x = \frac{\pi}{30} - \frac{1}{5} \arcsin \frac{1}{2\sqrt{2}} + \frac{2\pi n}{5}, \quad n \in \mathbf{Z}.$