Linköpings tekniska högskola
Matematiska institutionen
Tillämpad matematik

Kurskod: TATM79
Provkod: TEN6

Vanliga fel på Dugga 2 i Matematisk grundkurs 181001

1a) Ett vanligt fel är att säga att V.L. är definierat då $12 - 2x^2 > 0$ (FEL) men $\sqrt{0} = 0$ och alltså väldefinierat så det korrekta villkoret är $12 - 2x^2 \geq 0$ (RÄTT). En del som löser denna olikhet får lösningarna $x \leq \pm\sqrt{6}$ (FEL), men någon räkneregel som styrker ett sådant resonemang finns ju inte. Ett gott råd om man gjort detta fel är att tills vidare hålla sig till den metod för att hantera olikheter som vi övar på i kursen, nämligen flytta över allt till ett led, faktorisera detta, gör teckentabell och kontrollera genom insättning.

Många verkar också tro att villkoret $12 - 2x^2 \geq 0$ garanterar ekvivalens i kvadreringen (FEL) men för att få ekvivalens i kvadreringen krävs det ju att *båda* leden är positiva. Det räcker inte att bara ena ledet är det. Det korrekta villkoret för ekvivalens blir alltså $x+4 \geq 0$ och om inte detta villkor står med är det alltså helt nödvändigt att kontrollera båda kandidaterna i ursprungsekvationen.

I just detta exempel *råkar* det i och för sig bli så att om $12-2x^2 \geq 0 \Leftrightarrow -\sqrt{6} \leq x \leq \sqrt{6}$ så är villkoret $x + 4 \geq 0$ automatiskt uppfyllt, men detta är ju inget man kan veta från början utan något som måste redas ut ordentligt innan det går att använda sig av det i sin lösning.

En del skrev i sin kontroll att $\sqrt{4} = \pm 2$ (FEL) istället för det korrekta $\sqrt{4} = 2$ (RÄTT).

Många tappar onödiga poäng genom att göra slarvfel i kontrollen (teckenfel och liknande) och därför dra den felaktiga slutsatsen att en av kandidaterna är en falsk lösning. Det är viktigt att inte släppa på skärpan och koncentrationen förrän *hela* uppgiften är löst. Som Hans Chrunak uttryckte det på sin tid: 'Vi ska ända in i kaklet'.

1b) Många har påstått att den givna summan är geometrisk (FEL). Att så inte är fallet inses enklast genom att se på de första termerna i summan:

$$\sum_{k=2}^{101}(4^k + 2^k) = 20 + 72 + 272 + \ldots + (4^{101} + 2^{101})$$

och eftersom $\dfrac{72}{20} \neq \dfrac{272}{72}$ följer att den givna summan inte är geometrisk.

Ett annat problem som förtjänar att nämnas i sammanhanget är att även om givna summan *vore* geometrisk så är det ju inte uppenbart från det givna uttrycket eftersom det inte är på 'standardformen' $\displaystyle\sum_{k=m}^{n} aq^k$ där kvot och första term lätt kan läsas av. Därför räcker det naturligtvis inte att bara påstå att summan är geometrisk. Detta måste förstås *bevisas* t ex genom att skriva om summan på ovanstående form eller genom att titta på kvoten mellan två på varandra följande termer (t ex term k och term $k+1$) och bevisa att denna kvot inte beror på k.

I detta fall behöver man alltså studera kvoten

$$\frac{4^{k+1} + 2^{k+1}}{4^k + 2^k} = \frac{2^{k+2} + 2}{2^k + 1} = \frac{4(2^k + 1) - 2}{2^k + 1} = 4 - \frac{2}{2^k + 1}$$

som alldeles tydligt varierar med k.

2a) Denna uppgift har över lag gått bra. Vanligaste felen var att använda räknelagar felaktigt samt att säga att $\ln(x+4) = 2\ln(8-x) \Leftrightarrow \ln(x+4) = \ln(8-x)^2$ (FEL). Denna ekvivalens gäller bara för vissa x nämligen för de x som gör båda leden i det första påståendet väldefinierade, alltså för $-4 < x < 8$. Utan detta villkor råder *ej* ekvivalens mellan ovanstående påståenden. Om du gjort detta fel, studera noga din lösning på inlämningsuppgift 10, där samma typ av problematik uppstår.

2b) Här använde många räknelagar som inte är giltiga. En del gjorde också detta fel på 2a). Om du gjort detta fel, lägg ner lite tid på att studera de ln- och exponentiallagar som står beskrivna i boken och lär dig känna igen alla korrekta räknelagar och (ännu viktigare) att givet ett förslag på en räknelag, t ex $\dfrac{\ln a}{\ln b} = \ln a - \ln b$, kunna identifiera den som sann eller falsk (falsk i detta fall). En ovärderlig hjälp här är att helt enkelt sätta in enkla värden på a och b. Välj t ex $a = 1$, $b = e$ i ovanstående räknelagskandidat så är $V.L. = \dfrac{\ln 1}{\ln e} = \dfrac{0}{1} = 0$ medan $H.L. = \ln 1 - \ln e = 0 - 1 = -1 \neq V.L.$.

3a) Inget speciellt att kommentera.

3b) Ett vanligt fel här var att (direkt eller indirekt) påstå att ekvationen $\cos v = \dfrac{1}{5}$ bara har en lösning istället för oändligt många. T ex skrev en del att $\cos v = \dfrac{1}{5} \Leftrightarrow v = \arccos\dfrac{1}{5}$ (FEL) istället för det korrekta $\cos v = \dfrac{1}{5} \Leftrightarrow v = \pm\arccos\dfrac{1}{5} + n\cdot 2\pi\,,\ n \in \mathbf{Z}$ (RÄTT).

En del andra skrev att $\cos v = \dfrac{1}{5}$ ger att $0 < v < \pi/2$ (FEL) och då ekvationen $\cos v = \dfrac{1}{5}$ bara har en lösning i detta intervall är detta väsentligen samma fel som att säga att $v = \arccos\dfrac{1}{5}$ (FEL). Vi såg också ovan att t ex $v = \arccos\dfrac{1}{5} + 2\pi > 2\pi$ och $v = -\arccos\dfrac{1}{5} < 0$ är möjliga värden på v som inte uppfyller olikheten $0 < v < \pi/2$. En del andra skrev att v är en vinkel i en rätvinklig triangel (FEL) vilket ju är samma sak som att säga att $0 < v < \pi/2$.

Ett annat vanligt fel var att skriva att trig. ettan ger att $\sin v = \sqrt{1-\cos^2 v}$ (FEL) men då är en lösning borttappad eftersom $\sin v = \pm\sqrt{1-\cos^2 v}$ (RÄTT).

3c) Här verkar många ha 'känt på sig' vad som är rätt svar men sedan inte lyckats reda ut detaljerna. T ex ritar en del upp en rätvinklig triangel där en eller flera sidor har negativ längd (FEL), men sådana trianglar finns ju inte.

En del säger att $\alpha = \arctan\left(-\dfrac{1}{\sqrt{6}}\right)$ är en vinkel i en rätvinklig triangel (FEL) men $\alpha < 0$ och när vi talar om vinklar i trianglar menar vi alltid *positiva* vinklar, ty annars gäller inte många av de samband mellan sidor och vinklar som vi behöver i den här kursen. T ex gäller inte sambandet $\sin\alpha = \dfrac{\text{motst. katet}}{\text{hypotenusa}}$ om $-\pi/2 < \alpha < 0$ eftersom de båda leden då har olika tecken.

Många inför också egna beteckningar utan att tala om vad de betyder (FEL). T ex har många infört en vinkel v i en rätvinklig triangel och sett i denna att $\sin v = \dfrac{1}{\sqrt{7}}$, men inte talat om vad denna vinkel har med det sökta värdet $\sin\left(\arctan\left(-\frac{1}{\sqrt{6}}\right)\right)$ att göra. Hela resonemanget hänger alltså i luften och inga slutsatser kan dras.

En del skriver att trig. ettan ger att $\sin\alpha = \sqrt{1-\cos^2\alpha}$ (FEL) och missar då att också $\sin\alpha = -\sqrt{1-\cos^2\alpha}$ är en möjlighet.

4) Denna uppgift är mer eller mindre en kopia av inlämningsuppgift 13 så om du tappat poäng här, studera noga din lösning på denna inlämningsuppgift samt motsvarande exempel från föreläsningen.

Många resonerar korrekt och finner att om $\sin 3x - \cos 3x = C\sin(3x+v)$ där $C>0$ så måste $C=\sqrt{2}$ och v måste uppfylla systemet $\begin{cases}\cos v &= \quad 1/\sqrt{2}\\ \sin v &= -1/\sqrt{2}\end{cases}$ (RÄTT så långt) men skriver sedan att $\begin{cases}\cos v &= \quad 1/\sqrt{2}\\ \sin v &= -1/\sqrt{2}\end{cases} \Leftrightarrow v = -\pi/4$ (FEL) och missar då att systemet har många fler lösningar.

Det gäller ju att $\begin{cases}\cos v &= \quad 1/\sqrt{2}\\ \sin v &= -1/\sqrt{2}\end{cases} \Leftrightarrow v = -\pi/4 + 2\pi n\,,\ n \in \mathbf{Z}$ (RÄTT) vilket enklast syns genom att rita en enhetscirkel. Nu är det visserligen så att vi inte är intresserade av alla lösningar till ovanstående system eftersom det räcker att hitta *ett* värde på v för att kunna göra ovanstående omskrivning med hjälpvinkel, men det ändrar inte det faktum att om vi skriver att ekvivalens råder så måste *alla* möjligheter finnas med. Annars är ju inte ekvivalensen sann och vi har alltså farit med osanning.

En del säger att om $\cos v = 1/\sqrt{2}$ så måste $-\pi/2 < v < \pi/2$ (FEL). Av alla oändligt många lösningar $v = \pm\pi/4 + 2\pi n$, $n \in \mathbf{Z}$ till denna ekvation är det bara två, nämligen $x = \pm\pi/4$ som uppfyller detta villkor. Övriga lösningar gör det inte.

En del försöker lösa ovanstående system genom att titta på kvoten mellan ekvationerna och får att $\tan v = -1 \Leftrightarrow v = -\pi/4 + \pi n\,,\ n \in \mathbf{Z}$ (RÄTT så långt) och drar av detta slutsatsen att lösningarna till systemet är $v = -\pi/4 + \pi n\,,\ n \in \mathbf{Z}$ (FEL) och missar då att detta är två olika lösningar på varje varv i enhetscirkeln medan systemet bara har *en* lösning per varv. Hälften av dessa kandidater är alltså falska lösningar som introducerats när systemet ersatts med kvoten mellan ekvationerna. Löser man systemet på detta sätt är det alltså helt nödvändigt att kontrollera samtliga kandidater i det ursprungliga ekvationssystemet innan det går att vara säker på vilka kandidater som är riktiga lösningar och vilka som är falska.

En del försöker lösa den givna ekvationen genom att (eventuellt efter omflyttning) kvadrera båda leden vilket förstås går bra bara man observerar att ekvivalens inte råder vid kvadreringen och att samtliga (oändligt många) kandidater i så fall också måste kontrolleras i ursprungsekvationen innan det går att dra några slutsatser om dem.

Även på denna uppgift är det en del som felaktigt påstår att trig. ettan ger att $\sin 3x = \sqrt{1-\cos^2 3x}$ (FEL) istället för $\sin 3x = \pm\sqrt{1-\cos^2 3x}$.

Några observerar att man kan hitta vissa lösningar genom att gissa och sedan verifiera att det är lösningar man hittat genom insättning i ursprungsekvationen, t ex lösningarna $\sin 3x = 1$, $\cos 3x = 0 \Leftrightarrow 3x = \pi/2 + 2\pi n\,,\ n \in \mathbf{Z}$ har många hittat på detta sätt.

Det är alltså inte fel att hitta lösningar till en ekvation genom att gissa. Felet uppstår först när man förväxlar detta med att *lösa* ekvationen. I begreppet 'lösa en ekvation' ingår ju att också bevisa att *alla* lösningar hittats och oavsett hur många lösningar man lyckas gissa går det inte att vara säker på att det inte finns ännu fler. Vill man använda sig av gissningar är det alltså nödvändigt att också ge ett bevis för att alla lösningar hittats. Då detta ofta är besvärligt föredrar vi att successivt ersätta ursprungsekvationen med ekvivalenta påståenden tills alla ekvationens lösningar kan läsas av.

5) Ett vanligt fel var att ställa upp villkoren på x fel. En del sa att för att undvika nollställen i nämnaren så var det nödvändigt att $\ln\left(\dfrac{2x-1}{x+3}\right) > 0$ (FEL) när det räcker att $\ln\left(\dfrac{2x-1}{x+3}\right) \neq 0$ (RÄTT). Andra skrev att det krävs att $2x-1>0$ och $x+3>0$ för att logaritmen ska vara definierad (FEL) men det räcker att $\dfrac{2x-1}{x+3} > 0$ (RÄTT).

   En del tappar poäng på att de kommer med falska påståenden om f t ex att f är strängt växande (FEL), att f är strängt avtagande (FEL) eller att injektivitet hos f följer av att uttrycket för f innehåller en logaritm (FEL). I denna uppgift är ju dessutom den sortens resonemang helt onödiga även om de skulle varit korrekta då injektiviteten hos f följer direkt av räkningarna (se lösningsförslaget) $y = f(x) \Leftrightarrow \ldots \Leftrightarrow x = \dfrac{1+3e^{1/y}}{2-e^{1/y}}$. Någon ytterligare utredning av injektiviteten är alltså helt onödig i detta fall.

   Ett annat vanligt fel var att skriva att $e^{1/y} = e^{-y}$ (FEL).

   En del skriver $\sqrt[y]{e}$ istället för $e^{1/y}$ (FEL) men denna beteckning används bara om y är ett positivt heltal vilket inte är fallet här.

6) Denna uppgift är mer eller mindre en kopia av inlämningsuppgift 16c så om du tappat poäng här, studera noga din lösning på denna inlämningsuppgift samt motsvarande exempel från föreläsningen.

   Ett vanligt fel var att använda additionsformeln eller någon annan tan-formel felaktigt.

   Ett annat vanligt fel var att lösa ut v ur ekvationen $\tan v = 0$ genom att säga att $v = 0$ (FEL) eller $v = \pi$ (FEL). Den korrekta lösningen är ju $v = n\pi\,,\ n \in \mathbf{Z}$. Nästa vanliga fel var att ange denna allmänna lösning som svar, men det återstår ju fortfarande att reda ut *vilket* värde på n som svarar mot givna vinkeln v. För att göra detta behöver v stängas in i ett inte alltför stort intervall. Det räcker att observera att då $\sqrt{2} > 0$ och då $0 < 1/3 < 1$ följer att $0 < \arctan\sqrt{2}\,,\ \arccos\dfrac{1}{3} < \dfrac{\pi}{2}$ vilket ger $0 < v < \dfrac{3\pi}{2}$. Av talen $v = n\pi\,,\ n \in \mathbf{Z}$ är det bara ett som uppfyller olikheten $0 < v < \dfrac{3\pi}{2}$ nämligen $v = \pi$.

   Är man 'för generös' i sina uppskattningar kan man dock hamna i svårigheter. Om man t ex bara utnyttjar att $\arctan\sqrt{2} \in V_{\text{arctan}}$ och att $\arccos\dfrac{1}{3} \in V_{\text{arccos}}$ d v s att $-\dfrac{\pi}{2} < \arctan\sqrt{2} < \dfrac{\pi}{2}$ och $0 < \arccos\dfrac{1}{3} < \pi$ fås bara att $-\pi < v < 2\pi$ vilket inte räcker eftersom $v = n\pi$ hamnar i detta intervall både för $n = 0$ och $n = 1$. I detta fall måste alltså uppskattningarna skärpas så mycket att möjligheten $n = 0$ går att utesluta.

7) Inget speciellt att kommentera.