

Vanliga fel på Dugga 2 i Matematisk grundkurs 190930

- 1a) Förutom rena räknefel var vanligaste felet att tro att högerledet i ekvationen $\left(x - \frac{1}{2}\right)^2 + \left(y + \frac{3}{2}\right)^2 = \frac{9}{2}$ är cirkelns radie (FEL) när det i själva verket är radien² (RÄTT).

En del skriver cirkelns ekvation på formen $\sqrt{\left(x - \frac{1}{2}\right)^2 + \left(y + \frac{3}{2}\right)^2} = \frac{3}{\sqrt{2}}$ vilket förstås inte är fel, men det verkar lite onödigt att krångla till ekvationen med ett rotmärke istället för att hålla sig till formen $\left(x - \frac{1}{2}\right)^2 + \left(y + \frac{3}{2}\right)^2 = \frac{9}{2}$ (RÄTT) som i ekvation 1.24 på s 25.

- 1b) En del räknar fel på antalet termer. Summan består ju av term nr 1 t o m 13 (13 st) samt term nr 0, -1 och -2 (3 st). Totalt alltså $13 + 3 = 16$ termer (RÄTT).

En del räknar också fel på kvoten. Delar vi term nr $k + 1$ med term nr k får vi $\frac{2^{2(k+1)}}{2^{2k}} = \frac{2^{2k+2}}{2^{2k}} = 2^2 = 4$ (RÄTT) och inget annat.

En del använder formeln för en geometrisk summa utan att först konstatera att summan är geometrisk (FEL). Den här gången bestämde vi oss för att inte dra poäng för detta fel. Hur vi gör nästa gång har vi ännu inte bestämt.

- 1c) Standardformuleringen 'Utveckla' vållade bekymmer för några. Att utveckla betyder i detta sammanhang att skriva om en produkt av summor till en summa av produkter, ofta med hjälp av distributiva lagen, binomialsatsen, konjugatregeln och liknande. I detta fall utnyttjar man enklast binomialsatsen.

Några räknade också fel på potenserna av i vilket ofta ger upphov till teckenfel. För att undvika sådana fel kan man observera att $i = e^{i\frac{\pi}{2}}$, d v s i har belopp 1 och argument $\frac{\pi}{2}$. När vi multiplicerar i med sig själv många gånger flyttar vi oss alltså ett kvarts varv i enhetscirkeln för varje faktor, vilket omedelbart ger att $i^1 = i$, $i^2 = -1$, $i^3 = -i$ och $i^4 = 1$ varefter cykeln börjar om från början.

Det var också en del som inte förenklade sitt uttryck färdigt. Speciellt vanligt var det att svara med bråk som inte var fullständigt förkortade (FEL) vilket man naturligtvis aldrig ska göra.

- 2a) En del slarvar med villkoren på x . Tex missade en del villkoret $x > 0$ och fick därmed villkoret $x > -2$ (FEL) för att V.L. ska vara definierat istället för det korrekta $x > 0$ (RÄTT).

Några använder också räknelagarna fel och skriver att $-\ln x + \ln 9 = -\ln(9x)$ (FEL). I själva verket är ju $-\ln x + \ln 9 = -(\ln x - \ln 9) = -\ln \frac{x}{9}$ (RÄTT).

Ett annat vanligt fel är smärre räknefel av olika slag. Detta borde inte kunna inträffa utan att upptäckas förutsatt att man är noga med att kontrollera sina svar genom insättning i ursprungsekvationen.

Några som gjort en sådan kontroll finner att deras kandidat inte löser ursprungsekvationen trots att kandidaten är > 0 och drar av detta slutsatsen att kandidaten är en falsk

lösning trots att det råder ekvivalens i räkningarna för $x > 0$ (FEL). Eftersom ekvivalens råder i intervallet $x > 0$ är det ju omöjligt att det dyker upp falska lösningar som tillhör detta intervall, så den enda rimliga slutsatsen av en sådan misslyckad kontroll är att det är felräknat någonstans. Detta fel måste då förstås spåras upp och korrigeras.

- 2b) Många missar att x mycket väl kan vara negativt och gör omskrivningar som bara är giltiga då $x > 0$, t ex $\ln x^2 = 2 \ln x$ (FEL) och $(x^2)^{1/2} = x$ (FEL). Dessa omskrivningar hade visserligen varit korrekta om $x > 0$ men då även $x < 0$ är en möjlighet fås istället $\ln x^2 = \ln |x|^2 = 2 \ln |x|$ (RÄTT) och $(x^2)^{1/2} = |x|$ (RÄTT). Bättre är dock att inte göra liknande omskrivningar utan räkna t ex som i lösningsförslaget.

- 3a) En del ser $\cos 2x = \cos \left(\frac{5\pi}{7} - 3x \right)$ och $\cos 2x = \cos \left(- \left(\frac{5\pi}{7} - 3x \right) \right)$ som två separata ekvationer och skriver att $\cos 2x = \cos \left(\frac{5\pi}{7} - 3x \right) \Leftrightarrow 2x = \frac{5\pi}{7} - 3x + 2n\pi$ (FEL) och att $\cos 2x = \cos \left(- \left(\frac{5\pi}{7} - 3x \right) \right) \Leftrightarrow 2x = - \left(\frac{5\pi}{7} - 3x \right) + 2n\pi$, $n \in \mathbf{Z}$ (FEL).

Problemet är att $\cos 2x = \cos \left(\frac{5\pi}{7} - 3x \right)$ och $\cos 2x = \cos \left(- \left(\frac{5\pi}{7} - 3x \right) \right)$ är *samma* ekvation (eftersom $\cos v = \cos(-v)$ för alla v) och det är därför helt omöjligt att de har olika lösningar. Det gäller däremot att $\cos 2x = \cos \left(\frac{5\pi}{7} - 3x \right) \Leftrightarrow 2x = \pm \left(\frac{5\pi}{7} - 3x \right) + 2n\pi$ (RÄTT) och att $\cos 2x = \cos \left(- \left(\frac{5\pi}{7} - 3x \right) \right) \Leftrightarrow 2x = \pm \left(\frac{5\pi}{7} - 3x \right) + 2n\pi$ (RÄTT).

- 3b) Många tappar bort lösningar då de dividerar bort en faktor från ekvationen utan att undersöka om den faktorn kan bli 0. T ex skriver många att $\frac{\sin 2x}{\cos 2x} = 2 \sin 2x \Leftrightarrow \frac{1}{\cos 2x} = 2$ (FEL) istället för $\frac{\sin 2x}{\cos 2x} = 2 \sin 2x \Leftrightarrow \frac{1}{\cos 2x} = 2$ eller $\sin 2x = 0$ (RÄTT).

- 3c) En del påstår att $\arccos \left(-\frac{5}{6} \right)$ är en vinkel i en rätvinklig triangel (FEL), men det gäller ju att $\arccos \left(-\frac{5}{6} \right) > \arccos 0 = \frac{\pi}{2}$ ty $-\frac{5}{6} < 0$ och $\arccos$ är strängt avtagande, så vinkelsumman i en sådan tänkt rätvinklig triangel skulle alltså bli $> \frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{2} = \pi$ vilket är orimligt. Om du trots detta resonemang fortfarande är tveksam, ta fram papper och penna och försök själv rita en triangel där en vinkel är rät och en vinkel är trubbig. Då kommer du att se varför det är helt omöjligt att $\arccos \left(-\frac{5}{6} \right)$ ingår i en rätvinklig triangel!

En del påstår att $\arccos \left(-\frac{5}{6} \right) = \arctan \left(-\frac{\sqrt{11}}{5} \right)$ (FEL) men även detta är omöjligt då V.L. $> \frac{\pi}{2}$ enligt ovan, men H.L. $= \arctan \left(-\frac{\sqrt{11}}{5} \right) < \arctan 0 = 0$ ty $-\frac{\sqrt{11}}{5} < 0$ och $\arctan$ är strängt växande.

En del använder diverse räknelagar för att skriva om $\arccos\left(-\frac{5}{6}\right)$ vilket naturligtvis inte är fel, men det gäller ju i så fall att antingen använda räknelagar vi bevisat i kursen (antingen på föreläsningarna eller i kursboken) eller att själv bevisa de räknelagar som används. Att bara påstå att $\tan\left(\arccos\left(-\frac{5}{6}\right)\right) = -\tan\left(\arccos\left(\frac{5}{6}\right)\right)$ t ex, är alltså inte godkänt även om just detta påstående råkar vara sant.

Tänk på att bevisbördan alltid ligger på den som hävdar någonting, aldrig på läsaren.

- 4) Efter att ha härlett ekvationssystemet $\cos v = -\frac{1}{2}$, $\sin v = \frac{\sqrt{3}}{2}$ (vi antar att hjälpvinkelomskrivningen utförs på formen $f(x) = C \sin(x + v)$ som i lösningsförslaget) är det många som krånglar till det för sig i onödan genom att använda sig av en tredje ekvation $\tan v = -\sqrt{3}$, som är en konsekvens av dessa två.

Detta är förstås inte fel men som vi ska se är det verkligen att krångla till det för sig. Om vi nämligen betraktar det ursprungliga systemet $\cos v = -\frac{1}{2}$, $\sin v = \frac{\sqrt{3}}{2}$ ger en snabbt ritad enhetscirkel att detta har lösningarna $v = \frac{2\pi}{3} + 2n\pi$, $n \in \mathbf{Z}$, medan ekvationen $\tan v = -\sqrt{3}$ har lösningarna $v = -\frac{\pi}{3} + n\pi$, $n \in \mathbf{Z}$.

Genom att lösa tan-ekvationen hittar vi alltså dubbelt så många kandidater (2 per varv) som systemet har lösningar (1 per varv). Vi har alltså hittat oändligt många falska lösningar, vilket i och för sig inte är konstigt. Vi förväntar oss ju inte att en enda ekvation ska vara ekvivalent med ett system av två ekvationer.

Gör man på detta sätt är det alltså **helt nödvändigt att de kandidater man hittat kontrolleras genom insättning i det ursprungliga ekvationssystemet** dvs i ekvationerna $\cos v = -\frac{1}{2}$, $\sin v = \frac{\sqrt{3}}{2}$. Gör man detta finner man att $v = -\frac{\pi}{3} + n\pi$, $n \in \mathbf{Z}$ är en riktig lösning till systemet om n är udda och en falsk lösning till systemet om n är jämnt. Lösningarna till ekvationssystemet ges därmed av $v = -\frac{\pi}{3} + (2k+1)\pi = \frac{2\pi}{3} + 2k\pi$, $k \in \mathbf{Z}$ precis som tidigare.

Ännu ett vanligt fel var att säga att systemet $\cos v = -\frac{1}{2}$, $\sin v = \frac{\sqrt{3}}{2} \Leftrightarrow v = \frac{2\pi}{3}$ (FEL).

Även om vi bara behöver en av systemets lösningar för våra fortsatta räkningar, får vi inte misshandla ekvivalenspilen på detta sätt. En ekvivalenspil betyder ju i detta sammanhang att det enbart står lösningar till systemet till höger om pilen *och att detta också är samtliga lösningar till systemet*. Det är alltså absolut förbjudet att påstå att ekvivalens råder och sedan tappa bort lösningar.

Vi måste alltså skriva $\cos v = -\frac{1}{2}$, $\sin v = \frac{\sqrt{3}}{2} \Leftrightarrow v = \frac{2\pi}{3} + 2n\pi$, $n \in \mathbf{Z}$ (RÄTT). Först därefter är det fritt fram att välja ut den lösning man vill använda genom att t ex sätta $v = \frac{2\pi}{3}$.

En del skriver visserligen att $\cos v = -\frac{1}{2}$, $\sin v = \frac{\sqrt{3}}{2} \Leftrightarrow v = \frac{2\pi}{3} + 2n\pi$, $n \in \mathbf{Z}$ (RÄTT) men ritar ingen figur (FEL). Tänk på att för att en lösning ska vara fullständig måste de

påståenden som görs *motiveras*. Det är inte meningen att läsarna (d v s vi examinatorer) själva ska behöva rita de figurer som är nödvändiga för att kunna följa det resonemang som förs.

Ett sista vanligt fel var att tro att största värdet bara antas i en enda punkt d v s där $x + \frac{2\pi}{3} = \frac{\pi}{2}$ (FEL) men sin och cos är ju periodiska funktioner, så om ett värde antas i en punkt så antas detta värde per automatik i oändligt många punkter. Det korrekta är därför att $x + \frac{2\pi}{3} = \frac{\pi}{2} + 2n\pi$, $n \in \mathbf{Z}$.

En del löser ekvationen $x + \frac{2\pi}{3} = \frac{\pi}{2}$ och får den enda lösningen $x = -\frac{\pi}{6}$ och säger sedan att detta innebär att samtliga punkter där största värdet antas blir $x = -\frac{\pi}{6} + 2n\pi$, $n \in \mathbf{Z}$ (FEL). I detta fall råkar visserligen detta felaktiga resonemang av en slump ge rätt svar, men tänk om vi istället hade haft $f(x) = 2\sqrt{3} \sin\left(2x + \frac{2\pi}{3}\right)$.

I så fall hade största värdet antagits i de punkter där $2x + \frac{2\pi}{3} = \frac{\pi}{2} + 2n\pi$, $n \in \mathbf{Z} \Leftrightarrow x = -\frac{\pi}{12} + n\pi$, $n \in \mathbf{Z}$, d v s intervallet mellan två närliggande maxima får längden π och inte 2π .

Det är alltså absolut nödvändigt att ha $2n\pi$ med redan från början. Det fungerar *inte* att bara haka på denna term på slutet.

5a) Inget speciellt att kommentera.

5b) En del skriver direkt om högerledet med Euler och får uttrycket $\frac{1}{2}(\sin(k+3)x + \sin(k-3)x)$ och påstår sedan att någon eller båda dessa termer måste vara identisk med någon av termerna i motsvarande uttryck för vänsterledet (FEL). Detta är naturligtvis nonsens. Det är fullt möjligt att en ekvation har en lösning trots att ingen term i vänsterledet är identisk med någon term i högerledet. Ett motexempel är t ex ekvationen $\sin x + \cos 2x = \sin 3x + \cos 4x$ där alla ingående termer är olika, men ekvationen har ändå lösningen $x = 0$ (och oändligt många andra dessutom).

Även här är det många som hanterar ekvivalenspilar oförsiktigt. Som sagt är det viktigt att inte tappa bort lösningar ifall man påstår att ekvivalens råder, så efter att $x = -\frac{\pi}{12}$

satts in i båda leden vilket ger ekvationen $\sin \frac{k\pi}{12} = \frac{\sqrt{3}}{2}$ är det viktigt att observera att $\sin \frac{k\pi}{12} = \frac{\sqrt{3}}{2} \Leftrightarrow \frac{k\pi}{12} = \frac{\pi}{3} + 2n\pi$, $n \in \mathbf{Z}$ eller $\frac{k\pi}{12} = \pi - \frac{\pi}{3} + 2n\pi$, $n \in \mathbf{Z}$ och det går inte att påstå att ekvivalens råder om inte *alla* dessa möjligheter finns med.

6a) Som synes har vi gjort en informell uppdelning av uppgift 6) i 6a), 6b) och 6c) behandlande f , g respektive h . Här behandlar vi alltså f .

En del påstår att f inte är definierad i någon punkt, alternativt är definierad endast då $x = 1$ eftersom $\ln x \geq 0$ (FEL) så det blir negativt under rotmärket (FEL), men om $0 < x \leq 1$ är ju $\ln x \leq 0$ vilket innebär att $-\ln x \geq 0$ för $0 < x \leq 1$. Det står alltså något positivt under rotmärket, så f är väldefinierad.

En del skriver att $y = \sqrt{-\ln x} \Leftrightarrow y^2 = -\ln x$ (FEL) men det högra påståendet är ju ekvivalent med att $y = \pm\sqrt{-\ln x}$ och då minustecknet inte finns med i vänstra påståendet råder bara implikation här: $y = \sqrt{-\ln x} \Rightarrow y^2 = -\ln x$ (RÄTT).

I detta sammanhang förtjänar det att nämnas att i denna räkning klarar vi oss med implikation förutsatt att vi bara hittar en lösningskandidat. Implikation åt höger betyder ju att det visserligen kan ha smugit sig in falska lösningar, men att vi i vart fall inte har tappat bort någon lösning. Räkning med implikation där vi bara hittar en kandidat garanterar alltså att ekvationen $y = \sqrt{-\ln x}$ har *högst* en lösning för varje y och därmed har f en invers. Däremot räcker ett sådant resonemang inte till för att ta reda på för vilka y som $f^{-1}(y)$ är definierad. Vill vi ta reda på det måste vi se till att få ekvivalens i räkningarna.

Ett annat sätt att hantera kvadreringen är att konstatera att om $y < 0$ saknar ekvationen $y = \sqrt{-\ln x}$ lösning och om $y \geq 0$ står det positiva tal på båda sidor om likhetstecknet och vi kan därför kvadrera med bibehållen ekvivalens. Det gäller alltså att $y = \sqrt{-\ln x} \Leftrightarrow y^2 = -\ln x, y \geq 0$ (RÄTT).

Detta sätt att resonera har fördelen att vi, eftersom det inte dyker upp några ytterligare villkor på y i räkningarna, kan konstatera att $V_f = D_{f^{-1}} = [0, \infty[$.

En del löser ekvationen $y = \sqrt{-\ln x}$ korrekt och får den enda lösningen $x = e^{-y^2}$ (RÄTT så långt) men säger trots detta att f saknar invers (FEL) med motiveringen att ekvationen $x = e^{-y^2}$, nu med y tolkad som obekant istället för x har mer än en lösning. Detta är visserligen sant i meningen att om vi plockar fram samtliga lösningar till denna ekvation så får vi $y = \pm\sqrt{-\ln x}$ vilket är två olika lösningar för $0 < x < 1$. Problemet med resonemanget är att det inte är intressant hur många lösningar denna ekvation har totalt. Det som är intressant är hur många lösningar ekvationen har som ligger i $D_{f^{-1}} = V_f$ och vi såg ovan att $D_{f^{-1}} = V_f = [0, \infty[$, dvs den ena lösningen ligger *ej* i $D_{f^{-1}} = V_f$. Det följer att ekvationen $x = e^{-y^2}$ bara har en lösning i $D_{f^{-1}} = V_f$ nämligen den givna $y = \sqrt{-\ln x}$.

En del missar på prioriteringsreglerna och skriver att $e^{y^2} = (e^y)^2 = e^{2y}$ (FEL). Prioriteringsreglerna säger ju att i uttrycket e^{y^2} ska y först kvadreras och sedan ska resultatet exponentieras, medan $(e^y)^2$ betyder att y först ska exponentieras och sedan ska resultatet kvadreras. Operationerna ska alltså utföras i motsatt ordning i de båda uttrycken och de är därför *ej* lika.

- 6b) En del säger att $y = \sin x \Leftrightarrow x = \arcsin y$ (FEL) men det gäller ju att $y = \sin x \Leftrightarrow x = \arcsin y + 2n\pi, n \in \mathbf{Z}$ eller $x = \pi - \arcsin y + 2n\pi, n \in \mathbf{Z}$ (RÄTT).

Många ger visserligen rätt svar (d v s att invers saknas) men lyckas inte motivera detta påstående.

T ex säger en del att $\sin$ bara är inverterbar på intervallet $[-\pi/2, \pi/2]$ (FEL) men $\sin$ är ju inverterbar på en hel massa intervall. Studerar man grafen för $\sin$ (rita denna och se efter själv!) kan man t ex se att $\sin$ är inverterbar på varje intervall av formen $[-\pi/2 + 2\pi k, \pi/2 + 2\pi k]$ där k är ett godtyckligt heltal samt på alla intervall som är en delmängd ett sådant. Många andra möjligheter finns också (kan du se några?).

Några andra skriver att eftersom $\sin$ varken är strängt växande eller strängt avtagande på $[0, \pi[$ så saknar g invers (FEL) men det finns många funktioner som varken är strängt

växande eller strängt avtagande men som ändå har invers. Ett exempel på en sådan är $k(x) = \frac{1}{x}$.

Ytterligare andra skriver att eftersom det finns flera y till varje x så saknar g invers (FEL) men det ska ju vara tvärtom! Eftersom ekvationen $y = \sin x$ har mer än en lösning x till varje y med $0 < y < 1$ (d v s 'det finns flera x till varje y ') så saknar g invers (RÄTT). Värt att tänka på är att om det vore sant att det finns flera y till varje x så vore g inte ens en funktion eftersom en funktion bara får anta *ett* värde i varje punkt.

En del säger att g saknar invers men ger inte någon motivering alls eller säger bara att detta är lätt att se (FEL) men påståenden som inte motiveras ordentligt finns det ju ingen anledning att tro på. Tänk återigen på att bevisbördan ligger på den som kommer med ett påstående och inte på läsaren.

- 6c) Även här gör många felet att påstå att $y = \cos x \Leftrightarrow x = \arccos y$ (FEL) men det gäller ju att $y = \cos x \Leftrightarrow x = \pm \arccos y + 2n\pi$, $n \in \mathbf{Z}$.

En del byter definitionsmängd och därmed funktion, genom att påstå att $3\pi \leq x \leq 4\pi \Leftrightarrow \pi \leq x \leq 2\pi$ (FEL) men detta är ju två olika intervall (rita båda på tallinjen så ser du) och t ex (då $3.14 < \pi < 3.15$) är ju $x = 10$ en punkt i det vänstra intervallet som inte ligger i det högra och $x = 5$ ligger i högra intervallet men inte i det vänstra.

Många svarar också med att $x = h^{-1}(y) = \arccos y$ (FEL) och missar att detta leder till en motsägelse, ty i så fall vore ju $V_{h^{-1}} = V_{\arccos} = [0, \pi]$ (FEL) samtidigt som vi vet att om h har en invers så är $V_{h^{-1}} = D_h = [3\pi, 4\pi]$ (RÄTT).

- 7) Inget speciellt att kommentera.