

Lösningsförslag TATM79 2016-09-05 08–11

1. (a) Summan är geometrisk med kvoten $q = 9$. Första term är $\frac{1}{9}$ och antalet termer är 43. Alltså,

$$\sum_{k=0}^{42} 3^{2k-2} = 3^{-2} \sum_{k=0}^{42} 9^k = \frac{1}{9} \cdot \frac{9^{43} - 1}{9 - 1} = \frac{1}{72} (9^{43} - 1).$$

- (b) Vi förenklar direkt genom

$$\left| \frac{(1+2i)(2+i)}{3+i} \right| = \frac{|1+2i||2+i|}{|3+i|} = \frac{\sqrt{5} \cdot \sqrt{5}}{\sqrt{10}} = \sqrt{\frac{5}{2}}.$$

- (c) Uttrycket är definierat för $x > 0$ med $x \neq 1$. För dessa x , låt

$$f(x) = 2x^{1/2}(x - x^{-1})^{-1} - (x^{1/2} + x^{-1/2})^{-1} + (x^{1/2} - x^{-1/2})^{-1}.$$

Vi börjar med att göra de två sista termerna liknämninga (genom att förlänga med respektive konjugat) och kan sedan föra upp allt på samma bråk eftersom nämnarna blir likadana:

$$\begin{aligned} f(x) &= \frac{2x^{1/2}}{x - x^{-1}} + \frac{-(x^{1/2} - x^{-1/2}) + x^{1/2} + x^{-1/2}}{x - x^{-1}} \\ &= \frac{2x^{1/2}}{x - x^{-1}} + \frac{2x^{-1/2}}{x - x^{-1}} = \frac{2x^{1/2} + 2x^{-1/2}}{x - x^{-1}} \\ &= \frac{2x}{x^2 - 1} \cdot \frac{x + 1}{x^{1/2}} = \frac{2x^{1/2}}{x - 1}. \end{aligned}$$

Svar: (a) $\frac{1}{72}(9^{43} - 1)$ (b) $\sqrt{\frac{5}{2}}$ (c) $\frac{2x^{1/2}}{x - 1}.$

2. Vi kvadrerar ekvationen (observera att det då bara blir en implikation!):

$$\begin{aligned} 2\sqrt{x-1} + x\sqrt{5} &= \sqrt{5} &\Leftrightarrow & 2\sqrt{x-1} = \sqrt{5}(1-x) & (*) \\ &\Rightarrow & 4(x-1) &= 5(1-x)^2 = 5 - 10x + 5x^2 \\ &\Leftrightarrow & 9 - 14x + 5x^2 &= 0 \\ &\Leftrightarrow & x^2 - \frac{14}{5}x + \frac{9}{5} &= 0 \\ &\Leftrightarrow & x &= \frac{7}{5} \pm \frac{2}{5}. \end{aligned}$$

Eftersom vi har en implikation **måste** svaren testas. Om $x = 5/5 = 1$ ser vi att

$$VL = 2\sqrt{1-1} + 1 \cdot \sqrt{5} = \sqrt{5} \quad \text{och} \quad HL = \sqrt{5}$$

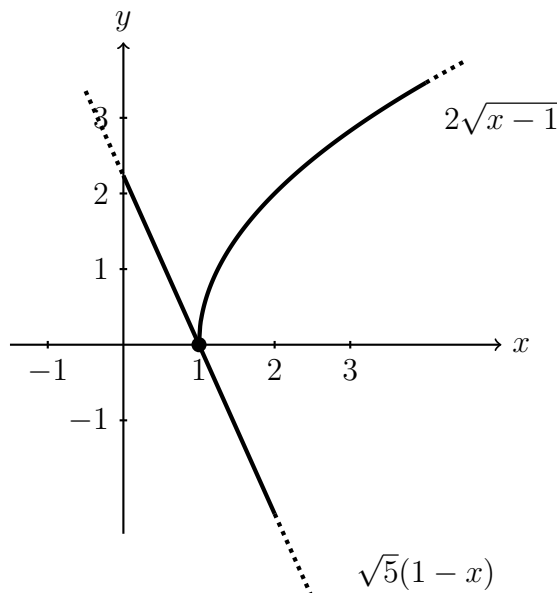
så $x = 1$ är en lösning. Om $x = \frac{9}{5}$ är

$$VL = 2\sqrt{\frac{9}{5}-1} + \frac{9}{5}\sqrt{5} = 2\sqrt{\frac{4}{5}} + \frac{9\sqrt{5}}{5} = \frac{13\sqrt{5}}{5} \quad \text{och} \quad HL = \sqrt{5}.$$

Eftersom vänsterled och högerled inte stämmer överens så är detta ingen lösning.

Alternativt: För att det ska kunna finnas en lösning till (*) ovan måste $x \geq 1$ och $x \leq 1$ (varför?). Således är $x = 1$ enda möjligheten. Kontrollen ovan visar att $x = 1$ löser ekvationen (kontrollen här är nödvändig).

Svar: $x = 1$.



3. Vi gissar en rot och finner att $p(-2) = 0$. Således är $x + 2$ en faktor så vi utför en polynomdivision och finner att

$$\begin{aligned} p(x) &= (x+2)(-9x^2+3x+2) = -9(x+2)\left(x^2 - \frac{1}{3}x - \frac{2}{9}\right) \\ &= -9(x+2)\left(\left(x - \frac{1}{6}\right)^2 - \frac{1}{4}\right) \\ &= -9(x+2)\left(\left(x - \frac{1}{6} - \frac{1}{2}\right)\left(x - \frac{1}{6} + \frac{1}{2}\right)\right) \\ &= -9(x+2)\left(x - \frac{2}{3}\right)\left(x + \frac{1}{3}\right) \end{aligned}$$

där vi kvadratkompletterat 2:a-gradsuttrycket och sedan använt konjugatregeln.

Svar: $p(x) = -9(x+2)\left(x - \frac{2}{3}\right)\left(x + \frac{1}{3}\right) = (x+2)(2-3x)(3x+1)$.

4. Vi ska lösa ekvationen $z^2 + 4z = 3i$. Steg ett är kvadratkomplettering:

$$z^2 + 4z = 3i \quad \Leftrightarrow \quad (z+2)^2 = 4 + 3i.$$

Låt $w = z + 2$. Vi löser

$$w^2 = 4 + 3i, \tag{1}$$

genom att låta $w = a + bi$. Detta leder till att

$$w^2 = (a + bi)^2 = a^2 - b^2 + 2iab = 4 + 3i.$$

Likhet gäller precis då real- respektive imaginärdelarna av ekvationen är lika, så

$$a^2 - b^2 = 4 \tag{2}$$

och

$$2ab = 3. \quad (3)$$

Observera även att (1) medför att

$$|w^2| = |4 + 3i| = \sqrt{4^2 + 3^2} = 5$$

och eftersom $|w^2| = |w|^2 = a^2 + b^2$ vet vi nu att

$$a^2 + b^2 = 5. \quad (4)$$

Genom att addera ekvation (2) och ekvation (4) ser vi att

$$2a^2 = 9 \quad \Leftrightarrow \quad a = \pm \frac{3}{\sqrt{2}}.$$

Om $a = 3/\sqrt{2}$ blir $b = 1/\sqrt{2}$ och om $a = -3/\sqrt{2}$ blir $b = -1/\sqrt{2}$ (enligt ekvation (3)). Vi har alltså lösningarna

$$w = \frac{3+i}{\sqrt{2}} \quad \text{och} \quad w = -\frac{3+i}{\sqrt{2}}$$

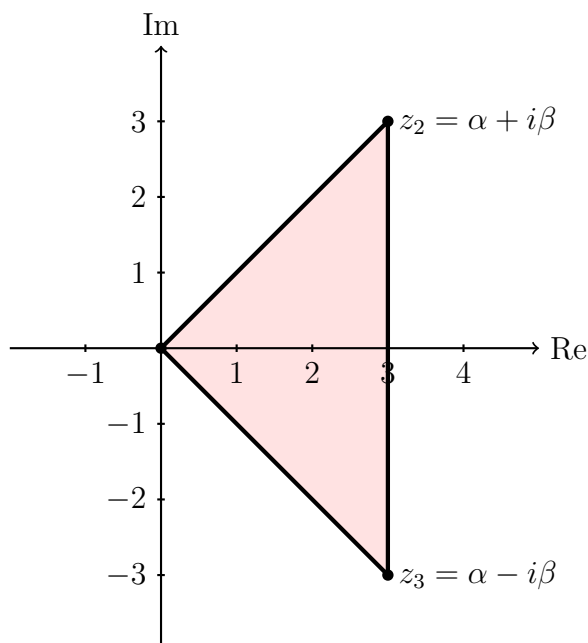
till ekvation (1). Eftersom $z = w - 2$ följer det att

$$z = -2 \pm \frac{3+i}{\sqrt{2}}$$

är lösningarna till ekvationen.

Svar: $z = -2 \pm \frac{3+i}{\sqrt{2}}.$

5. Vi ser att $z = 0$ är en rot och att $p(z) = z(z^2 + az + b)$. Om vi ska erhålla en triangel i komplexa talplanet måste övriga två rötter ha en nollskild imaginärdel. Dessutom, eftersom $a, b \in \mathbf{R}$, så kommer dessa två rötter att vara komplexkonjugerade med varandra. Således måste $z = \alpha \pm i\beta$ för $\alpha, \beta \in \mathbf{R}$. Vi måste kräva att $\alpha \neq 0$ och $\beta > 0$ för att få en triangel. Det reella talet α kan vara negativt, så med det behöver vi vara lite försiktiga. Vi skissar situationen i fallet då $\alpha > 0$ (om $\alpha < 0$ blir det en spegelvänd triangel i vänstra halvplanet).



Triangelns area ges av

$$A = \frac{2\beta \cdot |\alpha|}{2} = \beta|\alpha|.$$

Observera $|\alpha|$ här på grund av att vi inte vet tecknet på α .

Eftersom 2:a-gradspolynomet kan faktoriseras enligt

$$z^2 + az + b = (z - (\alpha + i\beta))(z - (\alpha - i\beta)) = z^2 - 2\alpha z + \alpha^2 + \beta^2$$

följer det genom identifikation av koefficienter att $a = -2\alpha$ samt att $b = \alpha^2 + \beta^2$. Alltså måste $\alpha = -a/2$ och $\beta = \sqrt{b - \alpha^2} = \sqrt{b - a^2/4}$. Sålunda blir den eftersökta arean

$$A = \frac{|a|\sqrt{4b - a^2}}{4}.$$

Notera att $b > \frac{a^2}{4}$ (en följd från att $\beta > 0$).

Svar: Arean blir $\frac{|a|\sqrt{4b - a^2}}{4}$, $b > \frac{a^2}{4}$ och $a \neq 0$.