Lösningsförslag TATM79 2016-09-17

1. (a) Vi kvadratkompletterar uttrycket och finner att

$$x^2 + y^2 = 10x \quad \Leftrightarrow \quad (x-5)^2 + y^2 = 25.$$

Centrum för cirkeln ligger alltså i $(5, 0)$ och radien är 5. Vi söker ekvationen för cirkelns tangent L_1 i punkten $(3, \sqrt{21})$: $y = kx + m$. Vi vet att denna linje måste vara vinkelrät mot linjen L_2 som går genom cirkelns mittpunkt och tangeringspunkten. Lutningen l för L_2 kan enkelt beräknas som

$$l = \frac{\sqrt{21} - 0}{3 - 5} = -\frac{\sqrt{21}}{2}$$

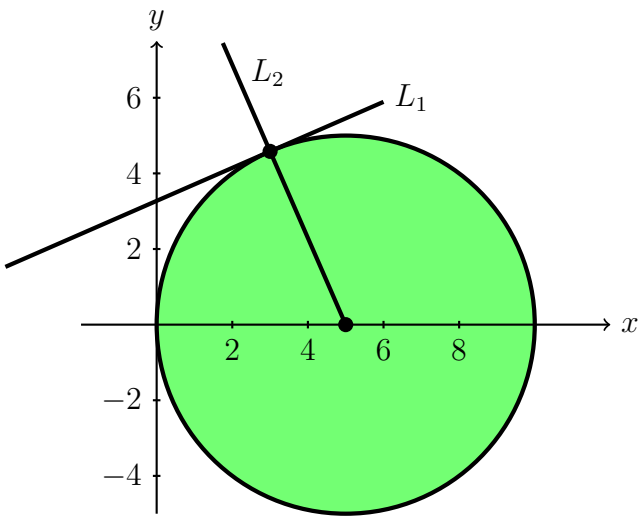
och eftersom $k \cdot l = -1$ så blir

$$k = \frac{2}{\sqrt{21}}.$$

Punkten $(3, \sqrt{21})$ ligger på den sökta linjen, så

$$\sqrt{21} = \frac{2}{\sqrt{21}} \cdot 3 + m \quad \Leftrightarrow \quad m = \frac{21 - 6}{\sqrt{21}} = \frac{15}{\sqrt{21}}.$$

Vi ritar en figur och ser till att allt verkar rimligt.



(b) Definition ges av $|z| = \sqrt{a^2 + b^2}$.

Svar: (a) Cirkeln har mittpunkt $(5, 0)$ och radie 5, tangentens ekvation är $y = \frac{1}{\sqrt{21}}(2x + 15)$
(b) $|z| = \sqrt{a^2 + b^2}$.

2. Beloppen definieras enligt

$$|x - 5| = \begin{cases} x - 5, & x \geq 5, \\ 5 - x, & x \leq 5 \end{cases} \qquad \text{och} \qquad |3 - x| = \begin{cases} 3 - x, & x \leq 3, \\ x - 3, & x \geq 3. \end{cases}$$

Intressanta punkter för de olika beloppen som ingår i ekvationen är $x = 5$ och $x = 3$. Vi delar upp i tre olika fall.

Fall 1: $x \leq 3$. Då är

$$2|x-5| - 3|3-x| = 5x+2 \quad \Leftrightarrow \quad 2(5-x) - 3(3-x) = 5x+2 \quad \Leftrightarrow \quad x = -\frac{1}{4},$$

vilket ligger i rätt intervall ($x \leq 3$). Alltså är $x = -\frac{1}{4}$ en lösning.

Fall 2: $3 \leq x \leq 5$. Då är

$$2|x-5| - 3|3-x| = 5x+2 \quad \Leftrightarrow \quad 2(5-x) - 3(x-3) = 5x+2 \quad \Leftrightarrow \quad x = \frac{17}{10},$$

vilket *inte* ligger i rätt intervall. Ingen lösning.

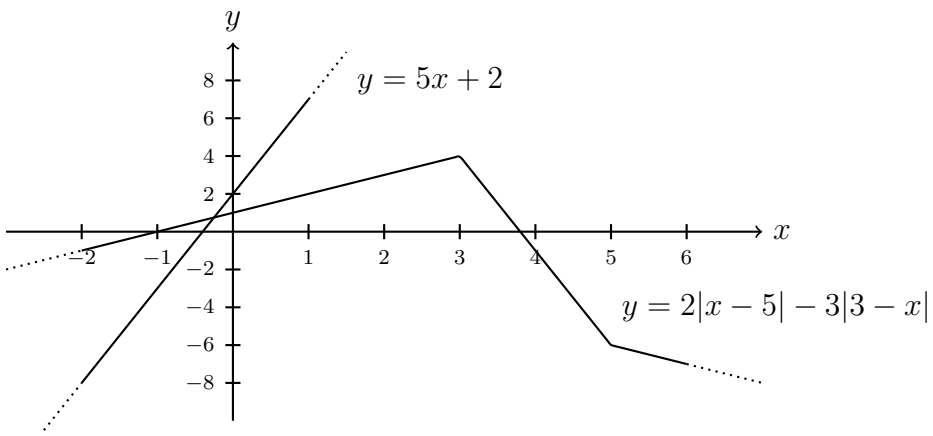
Fall 3: $x \geq 5$. Då är

$$2|x-5| - 3|3-x| = 5x+2 \quad \Leftrightarrow \quad 2(x-5) - 3(x-3) = 5x+2 \quad \Leftrightarrow \quad x = -\frac{1}{2},$$

vilket *inte* ligger i rätt intervall. Alltså ingen lösning.

Svar: $x = -\frac{1}{4}$.

Man kan även skissa vänster- och högerled i en graf för att se om svaret verkar rimligt.



3. (a) Summan är geometrisk med kvoten -8, första term 4 och 60 termer. Enligt känd formel erhåller vi att

$$\sum_{k=0}^{59} (-2)^{3k+2} = 4 \cdot \frac{(-8)^{60} - 1}{-8-1} = \frac{4}{9}\left(1 - 8^{60}\right).$$

(b) Vi skriver summan som $\sum_{k=1}^{200} a_k$. Termerna måste ha formen $a_k = kd + c$, så den tredje termen blir $a_3 = 40 = 3d + c$ och den trettonde $a_{13} = 36 = 13d + c$. Alltså blir $10d = 36 - 40 = -4$ så $d = -2/5$. Vidare blir i så fall $40 = -6/5 + c$, vilket leder till att $c = 206/5$. Vi kan nu räkna ut första och sista termen: $a_1 = 204/5$ och $a_{200} = -194/5$. Känd formel för aritmetiska summor medför nu att

$$\sum_{k=1}^{200} a_k = \frac{a_1 + a_{200}}{2} \cdot 200 = \frac{204 - 194}{10} \cdot 200 = 200.$$

Svar: (a) $\frac{4}{9}\left(1 - 8^{60}\right)$ (b) 200.

4. Eftersom koefficienterna reella så måste rötter med nollskild imaginärdel förekomma som komplexkonjugerade par. Alltså måste även $p(2-i\sqrt{2})=0$, så

$$p(z) = z(z+3)(z-(2+i\sqrt{2}))(z-(2-i\sqrt{2})) = z(z+3)(z^2-4z+6) = z^4-z^3-6z^2+18z$$

uppfyller de krav som angivits i uppgiften. Identifikation av koefficienterna visar att talen kan väljas enligt $a=-1$, $b=-6$, $c=18$, samt $d=0$. För att lösa olikheten utnyttjar vi den faktoriserade formen ovan och skriver

$$0 < p(x) = x(x+3)(x^2-4x+6) = x(x+3)((x-2)^2+2).$$

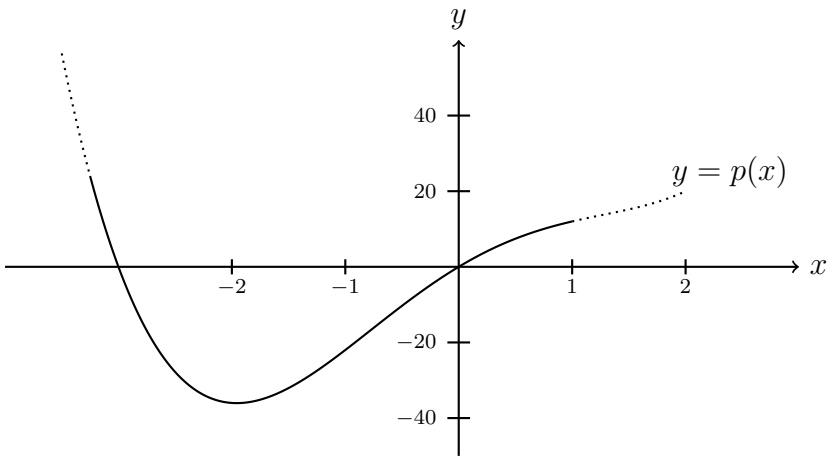
Vi gör ett teckenschema för högerledet.

		-3		0	
$x+3$	$-$	0	$+$		$+$
x	$-$		$-$	0	$+$
$(x-2)^2+2$	$+$		$+$		$+$
$p(x)$	$+$	0	$-$	0	$+$

Vi ser ur tabellen att uttrycket är positivt precis då $x<-3$ eller $x>0$.

Svar: $a=-1$, $b=-6$, $c=18$, samt $d=0$; För $x<-3$ och $x>0$ är $p(x)>0$.

Grafiskt svarar intervallen ovan mot var $p(x)$ ligger strikt ovanför x-axeln. Man kan se detta genom att rita grafen $y=p(x)$ (hur skulle "grafen" $w=p(z)$ se ut?).



5. Först skriver vi om olikheten för att få något som är enklare att studera:

$$\frac{ax}{x-1} \le x \quad \Leftrightarrow \quad \frac{-x^2+(a+1)x}{x-1} \le 0 \quad \Leftrightarrow \quad \frac{x(x-(a+1))}{x-1} \ge 0.$$

Vi ser här att det blir olika fall beroende på vilket värde $a \in \mathbf{R}$ har.

Fall 1. Om $a+1<0$. Vi gör ett teckenschema för det funna uttrycket.

		$a+1$		0		1	
$x-(a+1)$	$-$	0	$+$		$+$		$+$
x	$-$		$-$	0	$+$		$+$
$x-1$	$-$		$-$		$-$	0	$+$
$\dfrac{x(x-(a+1))}{x-1}$	$-$	0	$+$	0	$-$	☠	$+$

Vi ser ur tabellen att uttrycket är icke-negativt precis då $a+1 \leq x \leq 0$ eller $x > 1$.

Fall 2. Om $a+1=0$. Uttrycket reduceras i detta fall till $\dfrac{x^2}{x-1}$ och ett teckenschema kan skrivas upp.

		0		1	
x^2	$+$	0	$+$		$+$
$x-1$	$-$		$-$	0	$+$
$\dfrac{x^2}{x-1}$	$-$	0	$-$	☠	$+$

Vi ser ur tabellen att uttrycket är icke-negativt precis då $x=0$ eller $x>1$.

Fall 3. Om $0 < a+1 < 1$. Teckenschema:

		0		$a+1$		1	
x	$-$	0	$+$		$+$		$+$
$x-(a+1)$	$-$		$-$	0	$+$		$+$
$x-1$	$-$		$-$		$-$	0	$+$
$\dfrac{x(x-(a+1))}{x-1}$	$-$	0	$+$	0	$-$	☠	$+$

Vi ser ur tabellen att uttrycket är icke-negativt precis då $0 \leq x \leq a+1$ eller $x>1$.

Fall 4. Om $a+1=1$. Uttrycket reduceras till $x \geq 0$, men på grund av ursprungsformuleringen måste $x \neq 1$ fortfarande gälla. Så olikheten är med andra ord sann precis då $x \geq 0$ med $x \neq 1$.

Fall 5. Om $a+1>1$. Vi ritar ett teckenschema.

		0		1		$a+1$	
x	$-$	0	$+$		$+$		$+$
$x-1$	$-$		$-$	0	$+$		$+$
$x-(a+1)$	$-$		$-$		$-$	0	$+$
$\dfrac{x(x-(a+1))}{x-1}$	$-$	0	$+$	☠	$-$	0	$+$

Vi ser ur tabellen att uttrycket är icke-negativt precis då $0 \leq x < 1$ eller $x \geq a+1$.

Svar: Följande fall gäller:

$$\begin{array}{ll}
\text{om } a \leq -1, & a+1 \leq x \leq 0,\ x>1, \\
\text{om } -1 < a < 0, & 0 \leq x \leq a+1,\ x>1, \\
\text{om } a=0, & x \geq 0 \text{ med } x \neq 1, \\
\text{om } a>0, & 0 \leq x < 1,\ x \geq a+1.
\end{array}$$