Lösningsförslag TATM79 2016-09-26

1. (a) Vi isolerar $\sqrt{x+2}$ och kvadrerar ekvationen (observera att det då bara blir en implikation!):

$$\begin{aligned} 2\sqrt{3}+\sqrt{x+2}=x\sqrt{3} \quad &\Leftrightarrow \quad \sqrt{x+2}=\sqrt{3}(x-2) \\ &\Rightarrow \quad x+2=3(x-2)^2=3x^2-12x+12 \\ &\Leftrightarrow \quad x^2-\frac{13}{3}x+\frac{10}{3}=0 \\ &\Leftrightarrow \quad x=\frac{13}{6}\pm\frac{7}{6}. \end{aligned}$$

Eftersom vi har en implikation **måste** svaren testas. Om $x=20/6=10/3$ ser vi att

$$\mathrm{VL}=2\sqrt{3}+\sqrt{16/3}=2\sqrt{3}+\frac{4\sqrt{3}}{3}=\frac{10\sqrt{3}}{3} \quad \text{och} \quad \mathrm{HL}=\frac{10\sqrt{3}}{3}$$

så $x=10/3$ är en lösning. Om $x=6/6=1$ är

$$\mathrm{VL}=2\sqrt{3}+\sqrt{3}=3\sqrt{3} \quad \text{och} \quad \mathrm{HL}=1\cdot\sqrt{3}=\sqrt{3}.$$

I detta fall stämmer vänsterled och högerled inte överens, så $x=1$ är ingen lösning.

(b) Direkt från binomialsatsen erhåller vi att

$$\sum_{k=0}^{76}\binom{76}{k}2^k x^{76-k}=(2+x)^{76},$$

så

$$\begin{aligned} \sum_{k=0}^{76}\binom{76}{k}2^k x^{76-k}=1 \quad &\Leftrightarrow \quad (2+x)^{76}=1 \\ &\Leftrightarrow \quad 2+x=\pm 1 \quad \Leftrightarrow \quad x=-2\pm 1. \end{aligned}$$

Svar: (a) $x=\dfrac{10}{3}$ (b) -1 eller -3.

2. (a) För att alla logaritmer i ekvationen ska vara definierade krävs att $x\neq 0$, $x>-3$, samt $x>-4$. Totalt sett måste vi alltså kräva att $x>-3$ och $x\neq 0$. Antag att x uppfyller detta villkor. Då gäller (eftersom ln är injektiv) att

$$\begin{aligned} \ln(x^2)=\ln 2+\ln(3+x)+\ln(4+x) \quad &\Leftrightarrow \quad \ln(x^2)=\ln(2(3+x)(4+x)) \\ &\Leftrightarrow \quad x^2=2(3+x)(4+x) \\ &\Leftrightarrow \quad x^2+14x+24=0 \\ &\Leftrightarrow \quad x=-7\pm 5, \end{aligned}$$

där $x=-12$ inte uppfyller villkoret men $x=-2$ gör det.

(b) Vi logaritmerar båda leden (allt är positivt för alla $x\in\mathbf{R}$):

$$\begin{aligned} \frac{e^{x^2}}{2^{2x}}=e^{17} \quad &\Leftrightarrow \quad x^2-2x\ln 2=17 \\ &\Leftrightarrow \quad (x-\ln 2)^2=17+(\ln 2)^2 \\ &\Leftrightarrow \quad x=\ln 2\pm\sqrt{17+(\ln 2)^2}. \end{aligned}$$

Båda alternativen löser ekvationen (vi har ekvivalenser hela vägen).

Svar: (a) $x=-2$ (b) $x=\ln 2\pm\sqrt{17+(\ln 2)^2}$.

3. (a) Ur enhetscirkeln ser vi att

$$\cos\left(3x - \frac{\pi}{3}\right) = \cos\left(2x + \frac{\pi}{5}\right) \quad \Leftrightarrow \quad \begin{cases} 3x - \frac{\pi}{3} = 2x + \frac{\pi}{5} + 2\pi n, \ n \in \mathbf{Z} \\ \quad \text{eller} \\ 3x - \frac{\pi}{3} = -2x - \frac{\pi}{5} + 2\pi n, \ n \in \mathbf{Z} \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \quad \begin{cases} x = \frac{8\pi}{15} + 2\pi n, \ n \in \mathbf{Z} \\ \quad \text{eller} \\ x = \frac{2\pi}{75} + \frac{2\pi n}{5}, \ n \in \mathbf{Z}. \end{cases}$$

(b) Eftersom

$$2\sin x = \tan x \quad \Leftrightarrow \quad \sin x\left(2 - \frac{1}{\cos x}\right) = 0$$

så måste endera $\sin x = 0$ eller $\cos x = \frac{1}{2}$. Vi löser dessa ekvationer:

$$\sin x = 0 \quad \Leftrightarrow \quad x = n\pi$$

och

$$\cos x = \frac{1}{2} \quad \Leftrightarrow \quad x = \pm\frac{\pi}{3} + 2n\pi,$$

där n är ett godtyckligt heltal.

(c) Eftersom $\arccos(-3/4) \in [0, \pi]$ så är $\sin(\arccos(-3/4)) \geq 0$. Trigonometriska ettan visar därmed att

$$\sin\left(\arccos\left(-\frac{3}{4}\right)\right) = \sqrt{1 - \left(\cos\arccos\left(-\frac{3}{4}\right)\right)^2}$$
$$= \sqrt{1 - \left(-\frac{3}{4}\right)^2} = \sqrt{1 - \frac{9}{16}} = \frac{\sqrt{7}}{4}.$$

Svar: (a) $x = \frac{8\pi}{15} + 2\pi n$, $n \in \mathbf{Z}$, eller $x = \frac{2\pi}{75} + \frac{2\pi n}{5}$, $n \in \mathbf{Z}$,
(b) $x = n\pi$, $n \in \mathbf{Z}$, eller $x = \pm\frac{\pi}{3} + 2n\pi$, $n \in \mathbf{Z}$,
(c) $\frac{\sqrt{7}}{4}$.

4. (a) Genom att bryta ut e^{2x} i täljaren ser vi att

$$\frac{3e^{3x} - e^{2x}}{3e^x - 1} = \frac{e^{2x}(3e^x - 1)}{3e^x - 1} = 4 \quad \Leftrightarrow \quad e^{2x} = 4$$
$$\Leftrightarrow \quad 2x = \ln 4 = \ln 2^2 = 2\ln 2$$
$$\Leftrightarrow \quad x = \ln 2.$$

Den enda lösningen ges således av $x = \ln 2$.

Alternativt. Om vi låter $t = e^x$ kan vi skriva om ekvationen enligt

$$\frac{3t^3 - t^2}{3t - 1} = 4.$$

Här kan vi faktorisera täljaren enligt $3t^3 - t^2 = t^2(3t-1)$ och åter igen förkorta en faktor. Ser man inte det får man anta att $3t \neq 1$ (annars blir det nolldivision). Då gäller att

$$\frac{3t^3 - t^2}{3t-1} = 4 \quad \Leftrightarrow \quad 3t^3 - t^2 - 12t + 4 = 0.$$

Gissning av rot ($t = 2$ till exempel) och polynomdivision visar att

$$3t^3 - t^2 - 12t + 4 = (t-2)(3t^2 + 5t - 2) = 3(t-2)(t+2)\left(t - \frac{1}{3}\right).$$

Kandidater är alltså $t = \pm 2$ och $t = \frac{1}{3}$. Vi har antagit att $3t \neq 1$ så $t = \frac{1}{3}$ är ingen lösning. Vidare måste $t > 0$ (eftersom $e^x > 0$ för alla x), så $t = -2$ ger inte heller någon lösning. Endast

$$t = e^x = 2 \quad \Leftrightarrow \quad x = \ln 2$$

löser ekvationen.

(b) Från definitionen av e^{ix} erhåller vi att

$$(e^{ix})^2 = (\cos x + i \sin x)^2 = \cos^2 x - \sin^2 x + i2 \sin x \cos x = \cos 2x + i \sin 2x = e^{i2x}$$

där vi endast använt välkända formler för cosinus och sinus för dubbla vinkeln.

Svar: (a) $x = \ln 2$ (b) se ovan.

5. Vi börjar med att reda ut största möjliga definitionsmängd. Vi ser direkt att $-1 \leq x \leq 1$ är kravet för att $\arcsin x$ ska vara definierad. Vidare får inte

$$\arcsin x = \frac{\pi}{4} \quad \Leftrightarrow \quad x = \frac{1}{\sqrt{2}}.$$

Alltså blir

$$D_f = \left\{ x \in \mathbf{R} : -1 \leq x \leq 1,\ x \neq \frac{1}{\sqrt{2}} \right\} = \left[-1,\ \frac{1}{\sqrt{2}}\right[\cup \left]\frac{1}{\sqrt{2}},\ 1\right].$$

Låt $x \in D_f$. Då gäller att

$$\begin{aligned} y = \frac{\pi/4 + \arcsin x}{\pi/4 - \arcsin x} \quad &\Leftrightarrow \quad y\left(\frac{\pi}{4} - \arcsin x\right) = \frac{\pi}{4} + \arcsin x \\ &\Leftrightarrow \quad \arcsin x = \frac{\pi}{4} \cdot \frac{y-1}{y+1} \\ &\Rightarrow \quad x = \sin\left(\frac{\pi}{4} \cdot \frac{y-1}{y+1}\right). \end{aligned}$$

Eftersom vi finner högst en lösning för varje y så måste detta vara ett uttryck för $f^{-1}(y)$. Observera att det **endast är implikation** i sista steget ovan!

Svar: $D_f = \left\{ x \in \mathbf{R} : -1 \leq x \leq 1,\ x \neq \frac{1}{\sqrt{2}} \right\}$ och $f^{-1}(y) = \sin\left(\frac{\pi}{4} \cdot \frac{y-1}{y+1}\right)$.

6. En binomisk ekvation löser vi genom att gå över till polära koordinater. Låt $z = re^{i\theta}$ för $r \geq 0$ och $\theta \in \mathbf{R}$. Vi söker alla lösningar till ekvationen

$$z^7 = r^7 e^{i7\theta} = \left(\frac{\sqrt{3} - i}{1 - i}\right)^5. \tag{1}$$

Det komplexa talet $\sqrt{3}-i$ ligger i fjärde kvadranten och kan skrivas

$$\sqrt{3}-i=\sqrt{3+1}e^{-i\pi/6}=2e^{-i\pi/6}.$$

På samma sätt,

$$1-i=\sqrt{2}e^{-i\pi/4}.$$

Detta medför att

$$\left(\frac{\sqrt{3}-i}{1-i}\right)^5=\left(\frac{2}{\sqrt{2}}e^{-i\pi/6+i\pi/4}\right)^5=2^{5/2}e^{5\pi/12}.$$

För att (1) ska gälla måste högerledet och vänsterledet ha samma absolutbelopp och argumenten måste stämma överens upp till en heltalsmultipel av 2π. Således måste

$$r^7=2^{5/2}\quad\text{och}\quad 7\theta=\frac{5\pi}{12}+2\pi n,\ n\in\mathbf{Z}.$$

Eftersom $r\geq 0$ måste $r=2^{5/14}$ (enda möjligheten), och θ kan vi lösa ut ur den andra ekvationen som

$$\theta=\frac{5\pi}{84}+\frac{2\pi n}{7},\ n\in\mathbf{Z}.$$

Lösningarna till (1) ges alltså av

$$z=2^{5/14}e^{i\left(\frac{5\pi}{84}+\frac{2\pi n}{7}\right)},\quad n\in\mathbf{Z}.$$

Eftersom lösningarna ligger jämt fördelade på en cirkel och det finns precis 7 lösningar så räcker det med, tex, $n=0,1,2,3,4,5,6$.

Svar: $z=2^{5/14}e^{i\left(\frac{5\pi}{84}+\frac{2\pi n}{7}\right)},\quad n=0,1,2,3,4,5,6.$

7. Enligt ledningen ska $\cos\frac{\pi}{18}$ vara en rot så vi börjar med att verifiera detta. Eftersom

$$\cos^3 x=\left(\frac{e^{ix}+e^{-ix}}{2}\right)^3=\frac{1}{8}\left(e^{3ix}+3e^{ix}+3e^{-ix}+e^{-3ix}\right)=\frac{\cos 3x+3\cos x}{4},$$

vilket följer av Eulers formler och binomialsatsen, ser vi att

$$p\left(\cos\frac{\pi}{18}\right)=2\cos\frac{\pi}{6}+6\cos\frac{\pi}{18}-6\cos\frac{\pi}{18}-\sqrt{3}=\sqrt{3}-\sqrt{3}=0.$$

Låt $a=\cos\frac{\pi}{18}$. Vi utför en polynomdivision med $x-a$.

$$\begin{array}{rrrrrrrl}
 & & & 8x^2 & + & 8ax & + & 8a^2-6 \\
\hline
 & 8x^3 & & & - & 6x & - & \sqrt{3} \quad \big|\ x-a \\
- & (8x^3 & - & 8ax^2) & & & & \\
\hline
 & & & 8ax^2 & - & 6x & - & \sqrt{3} \\
 & & - & (8ax^2 & - & 8a^2x) & & \\
\hline
 & & & & & (8a^2-6)x & - & \sqrt{3} \\
 & & & & - & ((8a^2-6)x & - & (8a^3-6a)) \\
\hline
 & & & & & & & 8a^3-6a-\sqrt{3}
\end{array}$$

Observera här att sista raden blir noll eftersom $0 = p(a) = 8a^3 - 6a - \sqrt{3}$. Således kan vi nu faktorisera klart polynomet:

$$\begin{aligned} p(x) &= (x-a)\left(8x^2 + 8ax + 8a^2 - 6\right) \\ &= 8(x-a)\left(\left(x + \frac{a}{2}\right)^2 + \frac{3a^2-3}{4}\right) \\ &= 8(x-a)\left(x + \frac{a+\sqrt{3-3a^2}}{2}\right)\left(x + \frac{a-\sqrt{3-3a^2}}{2}\right). \end{aligned}$$

Här är det viktigt att notera att $a^2 < 1$ eftersom $a = \cos\frac{\pi}{18}$, så kvadratrötterna ovan är definierade. Dessutom blir $\sqrt{1-a^2} = \sin\frac{\pi}{18}$ enligt den trigonometriska ettan, så svaret går att uttrycka lite enklare. Som svar kan man tänka sig ett av följande tre alternativ.

Svar:

$$\begin{aligned} p(x) &= 2(x-a)\left(2x + a + \sqrt{3-3a^2}\right)\left(2x + a - \sqrt{3-3a^2}\right) \\ &= 2\left(x - \cos\frac{\pi}{18}\right)\left(2x + \cos\left(\frac{\pi}{18}\right) + \sqrt{3}\sin\left(\frac{\pi}{18}\right)\right)\left(2x + \cos\left(\frac{\pi}{18}\right) - \sqrt{3}\sin\left(\frac{\pi}{18}\right)\right) \\ &= 8\left(x - \cos\frac{\pi}{18}\right)\left(x + \cos\left(\frac{5\pi}{18}\right)\right)\left(x + \cos\left(\frac{7\pi}{18}\right)\right). \end{aligned}$$

I den sista likheten har vi använt hjälpvinkelmetoden för att slå ihop summorna av cos och sin.