

Lösningsförslag TATM79 2017-09-04

1. (a) Direkt från definitionen av binomialkoefficienter erhåller vi

$$\binom{18}{16} = \binom{18}{2} = \frac{18 \cdot 17}{2} = 153.$$

- (b) Summan är aritmetisk med 200 termer, så

$$\sum_{k=3}^{202} (2 + 5k) = \frac{17 + 2 + 5 \cdot 202}{2} \cdot 200 = 1029 \cdot 100 = 102900.$$

- (c) Först skriver vi om z på formen $a + ib$ (med $a, b \in \mathbf{R}$):

$$z = \frac{2-i}{3+i} - \frac{1}{2+2i} = \frac{(2-i)(3-i)}{10} - (2-2i) = \frac{1}{2} - 2 + i(-\frac{1}{2} + 2) = -\frac{3}{2} + i\frac{3}{2}.$$

$$\text{Därmed blir } |z| = \sqrt{\left(-\frac{3}{2}\right)^2 + \left(\frac{3}{2}\right)^2} = \frac{3}{\sqrt{2}}.$$

Svar. (a) 153 (b) 102900 (c) $\frac{3}{\sqrt{2}}$.

2. Först skriver vi om olikheten för att få något som är enklare att studera:

$$\frac{x}{2-x} \leq \frac{1}{x} \quad \Leftrightarrow \quad \frac{x^2 - (2-x)}{x(2-x)} \leq 0 \quad \Leftrightarrow \quad \frac{(x+2)(x-1)}{x(x-2)} \geq 0.$$

Vi gör ett teckenschema för det funna uttrycket.

	-2	0	1	2
$x+2$	- 0 +	+	+	+
x	-	- 0 +	+	+
$x-1$	-	-	- 0 +	+
$x-2$	-	-	-	- 0 +
$\frac{(x+2)(x-1)}{x(x-2)}$	+ 0 -	☠	+ 0 -	☠ +

Vi ser ur tabellen att uttrycket är icke-negativt precis då $x \leq -2$, $0 < x \leq 1$ eller $x > 2$.

Svar: $x \leq -2$ eller $0 < x \leq 1$ eller $x > 2$.

3. Låt oss stuva om i ekvationen för att sedan kvadrera båda leden (observera att det då bara blir en implikation!):

$$\begin{aligned} x\sqrt{3} + \sqrt{5-2x} &= 2\sqrt{3} &\Leftrightarrow & \sqrt{5-2x} = (2-x)\sqrt{3} \\ &&\Rightarrow & 5-2x = (2-x)^2 \cdot 3 = 12 - 12x + 3x^2 \\ &&\Leftrightarrow & 3x^2 - 10x + 7 = 3\left(x - \frac{7}{3}\right)(x-1) = 0 \\ &&\Leftrightarrow & x = \frac{7}{3} \quad \text{eller} \quad x = 1. \end{aligned}$$

Eftersom vi har en implikation **måste** svaren testas. Om $x = 1$ ser vi att

$$VL = \sqrt{3} + \sqrt{5-2} = 2\sqrt{3} \quad \text{och} \quad HL = 2\sqrt{3}$$

så $x = 1$ är en lösning. Om $x = \frac{7}{3}$ är

$$VL = \frac{7}{3}\sqrt{3} + \sqrt{5-2} \cdot \frac{7}{3} = \frac{7\sqrt{3}}{3} + \frac{\sqrt{3}}{3} = \frac{8\sqrt{3}}{3} \quad \text{och} \quad HL = 2\sqrt{3}.$$

Eftersom vänsterled och högerled inte stämmer överens så är detta ingen lösning.

Svar: $x = 1$.

4. Cirkeln kan beskrivas med ekvationen

$$\left(x + \frac{3}{5}\right)^2 + \left(y - \frac{1}{5}\right)^2 = 9$$

och linjen som går genom $(4, -3)$ och $(-3, 11)$ har ekvationen $y = -2x + 5$ (två-punkts-formeln tex). Vi söker skärningspunkter mellan linjen och cirkeln, så både linjens och cirkelns ekvation måste uppfyllas samtidigt. Således måste följande gälla:

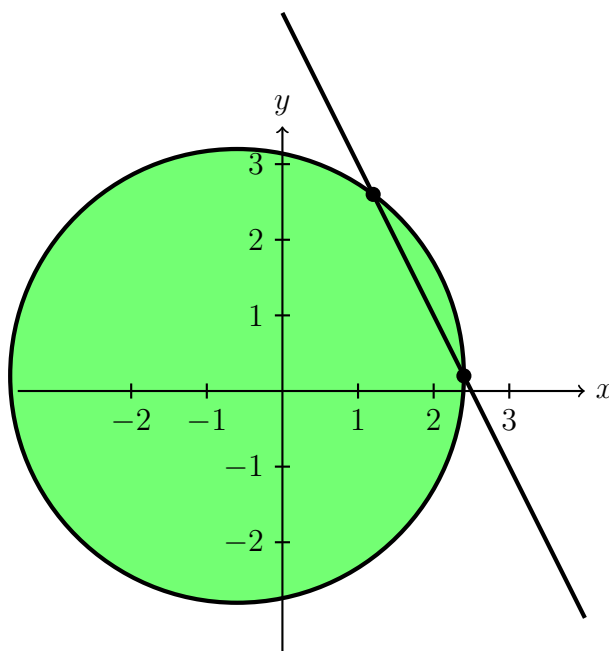
$$9 = \left(x + \frac{3}{5}\right)^2 + \left(-2x + 5 - \frac{1}{5}\right)^2 = x^2 + \frac{6}{5}x + \frac{9}{25} + 4x^2 - \frac{96}{5}x + \frac{24^2}{25} = 5x^2 - 18x + \frac{117}{5}.$$

Vi löser denna ekvation:

$$\begin{aligned} 9 = 5x^2 - \frac{90}{5}x + \frac{585}{25} &\Leftrightarrow x^2 - \frac{18}{5}x + \frac{72}{25} = 0 \\ &\Leftrightarrow \left(x - \frac{9}{5}\right)^2 + \frac{72 - 81}{25} = 0 \\ &\Leftrightarrow x = \frac{9}{5} \pm \frac{3}{5}. \end{aligned}$$

Alltså blir de sökta x -koordinaterna $x = \frac{12}{5}$ respektive $x = \frac{6}{5}$. Eftersom vi söker punkter på linjen $y = -2x + 5$ så erhåller vi skärningspunkterna $\left(\frac{12}{5}, \frac{1}{5}\right)$ och $\left(\frac{6}{5}, \frac{13}{5}\right)$.

Vi ritar en figur och ser till att allt verkar rimligt.



Svar: $\left(\frac{12}{5}, \frac{1}{5}\right)$ och $\left(\frac{6}{5}, \frac{13}{5}\right)$.

5. Låt oss betrakta polynomet för komplexa variabler. Således är

$$p(z) = z^{99} - 4z^{97} - 3z^{38} - 16z^{34} + 4z^3 - 2z + 10.$$

Låt $q(z) = z^2 + 4$. Då $p(z)$ har grad 99 följer det att det finns ett polynom $k(z)$ med grad 97 och ett polynom $r(z)$ med grad ≤ 1 så att $p(z) = k(z)q(z) + r(z)$ för alla z . Vi ansätter att $r(z) = az + b$. Enligt föregående formel gäller då

$$p(z) = k(z)(z^2 + 4) + az + b.$$

Speciellt är denna ekvation sann för $z = \pm 2i$. Eftersom $(2i)^2 + 4 = 0$ följer det då att

$$\begin{aligned} a \cdot 2i + b &= p(2i) = -i2^{99} - 4i2^{97} + 3 \cdot 2^{38} + 16 \cdot 2^{34} - 4i2^3 - 4i + 10 \\ &= 2^{40} + 10 + (-2^{100} - 36)i. \end{aligned}$$

Eftersom både $p(x)$ och $q(x)$ är reella måste $r(x)$ också vara reell. Det innebär att $a, b \in \mathbf{R}$. Ekvationen ovan medför då att

$$2a = -2^{100} - 36 \quad \Leftrightarrow \quad a = -2^{99} - 18$$

och

$$b = 2^{40} + 10.$$

Svar: Resten blir $(-2^{99} - 18)x + 2^{40} + 10$.