Lösningsförslag TATM79 2017-09-25

1. (a) Låt oss stuva om i ekvationen för att sedan kvadrera båda leden (observera att det då bara blir en implikation!):

$$
\begin{aligned}
3+\sqrt{3x^2-9x+7}=x \quad &\Leftrightarrow \quad \sqrt{3x^2-9x+7}=x-3 && (*)\\
&\Rightarrow \quad 3x^2-9x+7=(x-3)^2=x^2-6x+9\\
&\Leftrightarrow \quad 2x^2-3x-2=2\,(x-2)\left(x+\frac{1}{2}\right)=0\\
&\Leftrightarrow \quad x=2 \quad \text{eller} \quad x=-\frac{1}{2}.
\end{aligned}
$$

Eftersom vi har en implikation **måste** svaren testas. För att $(*)$ ska ha en lösning måste högerledet vara icke-negativt, dvs $x \geq 3$. Ingen av våra kandidater uppfyller detta, så ekvationen saknar lösning (implikationen är faktiskt en ekvivalens om villkoret $x \geq 3$ läggs till).

Självfallet går det även att direkt testa vänster- och högerled för våra alternativ.

(b) Vi utför en polynomdivision:

$$
\begin{array}{rrrrrrr|l}
 & x & - & 2 & & & & \\
\hline
 & x^3 & - & 2x^2 & & + & 7 & x^2+1 \\
\cline{8-8}
- & (x^3 & & & + & x) & & \\
\hline
 & & - & 2x^2 & - & x & + \; 7 & \\
 & - & (- & 2x^2 & & - & 2) & \\
\cline{3-7}
 & & & & - & x & + \; 9 &
\end{array}
$$

Detta ger att $x^3-2x^2+7=(x-2)(x^2+1)+9-x$, så kvoten blir $x-2$ och resten $9-x$. Med andra ord,

$$\frac{p(x)}{q(x)}=x-2+\frac{9-x}{x^2+1}.$$

Svar: (a) Inga lösningar (b) $p(x)=(x-2)q(x)+9-x$.

2. (a) För att alla logaritmer i ekvationen ska vara definierade krävs att $x<\frac{5}{2}$ och $x>-1$. Antag att x uppfyller dessa villkor. Då gäller (eftersom ln är injektiv) att

$$
\begin{aligned}
\ln\left(\frac{5}{2}-x\right)-2\ln(x+1)=\ln\frac{9}{2} \quad &\Leftrightarrow \quad \ln\left(\frac{5}{2}-x\right)=\ln\left(\frac{9}{2}(x+1)^2\right)\\
&\Leftrightarrow \quad \frac{5}{2}-x=\frac{9}{2}(x^2+2x+1)\\
&\Leftrightarrow \quad 9x^2+20x+4=0\\
&\Leftrightarrow \quad x=-\frac{10}{9}\pm\frac{8}{9},
\end{aligned}
$$

där $x=-\frac{18}{9}=-2$ inte uppfyller att $x>-1$ men $x=-\frac{2}{9}$ uppfyller båda villkoren.

(b) För att lösning ska existera måste $x > 0$ så att $\ln x$ är definierad. Vi logaritmerar båda leden (både vänster- och högerled är positiva för alla $x > 0$):

$$x^{\ln x} = \sqrt{e} \quad \Leftrightarrow \quad (\ln x)^2 = \frac{1}{2}\ln e = \frac{1}{2}$$
$$\Leftrightarrow \quad \ln x = \pm\frac{1}{\sqrt{2}} \quad \Leftrightarrow \quad x = \exp\left(\pm\frac{1}{\sqrt{2}}\right).$$

Båda alternativen löser ekvationen (vi har ekvivalenser hela vägen).

Svar: (a) $x = -\dfrac{2}{9}$ (b) $x = \exp\left(\pm\dfrac{1}{\sqrt{2}}\right)$.

3. (a) Eftersom $\cos 2x = 2\cos^2 x - 1$ följer det att

$$\cos 2x - 3\cos x = 1 \quad \Leftrightarrow \quad 0 = \cos^2 x - \frac{3}{2}\cos x - 1 = \left(\cos x - \frac{3}{4}\right)^2 - \frac{25}{16}$$
$$\Leftrightarrow \quad \cos x = \frac{3}{4} \pm \frac{5}{4}.$$

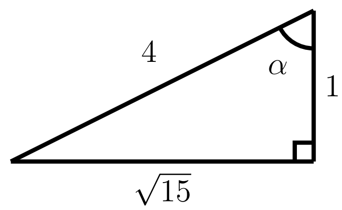
Ekvationen $\cos x = 2$ saknar lösningar, men

$$\cos x = -\frac{1}{2} \quad \Leftrightarrow \quad x = \pm\frac{2\pi}{3} + 2\pi n,$$

där $n \in \mathbf{Z}$.

(b) Vi ser att $\alpha = \arccos\dfrac{1}{4} \in \left]0, \dfrac{\pi}{2}\right[$.

Eftersom $0 < \alpha < \pi/2$ kan vi direkt rita upp en rätvinklig hjälptriangel där $\cos\alpha = \dfrac{1}{4}$. Ifrån denna triangel ser vi att $\sin\alpha = \dfrac{\sqrt{15}}{4}$.



Således erhåller vi att

$$e^{i\arccos\frac{1}{4}} = \cos\left(\arccos\frac{1}{4}\right) + i\sin\left(\arccos\frac{1}{4}\right) = \frac{1}{4} + i\frac{\sqrt{15}}{4}$$

Svar: (a) $x = \pm\dfrac{2\pi}{3} + 2\pi n$, $n \in \mathbf{Z}$, (b) $e^{i\arccos\frac{1}{4}} = \dfrac{1}{4} + i\dfrac{\sqrt{15}}{4}$.

4. Vi börjar med att reda ut största möjliga definitionsmängd. För att kvadratroten ska vara definierad måste vi kräva att

$$\frac{4}{1-2x} - 1 \geq 0 \quad \Leftrightarrow \quad \frac{3+2x}{1-2x} \geq 0 \quad \Leftrightarrow \quad -\frac{3}{2} \leq x < \frac{1}{2}.$$

Detta kan ses med hjälp av tex en teckentabell:

		$-\frac{3}{2}$		$\frac{1}{2}$	
$3+2x$	$-$	0	$+$		$+$
$1-2x$	$+$		$+$	0	$-$
$\dfrac{3+2x}{1-2x}$	$-$	0	$+$	☠	$-$

Definitionsmängden blir således $D_f = \left[-\frac{3}{2}, \frac{1}{2}\right[$. För $x \in D_f$ gäller att

$$\begin{aligned} y = \sqrt{\frac{4}{1-2x} - 1} \quad &\Rightarrow \quad y^2 = \frac{4}{1-2x} - 1 \quad \Leftrightarrow \quad 1 + y^2 = \frac{4}{1-2x} \\ &\Leftrightarrow \quad 1 - 2x = \frac{4}{1+y^2} \quad \Leftrightarrow \quad x = \frac{1}{2}\left(1 - \frac{4}{1+y^2}\right) = \frac{y^2-3}{2(1+y^2)}. \end{aligned}$$

Vi finner högst en lösning för varje y, vilket innebär att $f^{-1}(y) = \frac{y^2-3}{2(1+y^2)}$.

Svar: $D_f = \left[-\frac{3}{2}, \frac{1}{2}\right[$ och $f^{-1}(y) = \frac{y^2-3}{2(1+y^2)}$.

5. Vi ser att med substitutionen $t = 3^{-x}$, $x \in \mathbf{R}$, så övergår ekvationen till

$$2^3 \cdot t^3 + t + 6 = 2 \cdot 9 \cdot t^2 \quad \Leftrightarrow \quad 8t^3 - 18t^2 + t + 6 = 0.$$

Vi gissar rötter och finner att $t = 2$ är en lösning. Polynomdivision med $t - 2$ visar att

$$8t^3 - 18t^2 + t + 6 = (t-2)(8t^2 - 2t - 3).$$

Rötterna till andragradsfaktorn ges av

$$0 = 8t^2 - 2t - 3 = 8\left(\left(t - \frac{1}{8}\right)^2 - \frac{25}{64}\right) = 8\left(t - \frac{3}{4}\right)\left(t + \frac{1}{2}\right).$$

Eftersom $t = 3^{-x} > 0$ så saknas lösningar till $t = -\frac{1}{2}$. Övriga rötter renderar lösningarna

$$t = \frac{3}{4} \quad \Leftrightarrow \quad 3^{-x} = \frac{3}{4} \quad \Leftrightarrow \quad x = -\frac{\ln \frac{3}{4}}{\ln 3} = 2\frac{\ln 2}{\ln 3} - 1$$

samt

$$t = 2 \quad \Leftrightarrow \quad 3^{-x} = 2 \quad \Leftrightarrow \quad x = -\frac{\ln 2}{\ln 3}.$$

Svar: $x = 2\frac{\ln 2}{\ln 3} - 1$ eller $x = -\frac{\ln 2}{\ln 3}$.

6. (a) Eftersom $e^t > 0$ för alla $t \in \mathbf{R}$ så gäller enligt kända logaritmlagar att

$$e^x \cdot e^y = \exp\left(\ln\left(e^x \cdot e^y\right)\right) = \exp\left(\ln e^x + \ln e^y\right) = \exp(x+y) = e^{x+y},$$

där vi utnyttjat att ln och exp är varandras inverser.

(b) Enligt definitionerna gäller att

$$y = \arccos(\cos x) \quad \Leftrightarrow \quad \begin{cases} \cos y = \cos x, \\ y \in [0, \pi], \end{cases} \quad \Leftrightarrow \quad \begin{cases} y = \pm x + 2\pi n, \ n \in \mathbf{Z}, \\ y \in [0, \pi] \end{cases}$$

och

$$\begin{aligned} y = \arcsin(\sin x) \quad &\Leftrightarrow \quad \begin{cases} \sin y = \sin x, \\ y \in [-\pi/2, \pi/2], \end{cases} \\ &\Leftrightarrow \quad \begin{cases} y = x + 2\pi n, \ n \in \mathbf{Z}, \text{ eller } y = \pi - x + 2\pi n, \ n \in \mathbf{Z}, \\ y \in [-\pi/2, \pi/2]. \end{cases} \end{aligned}$$

Således blir

$$\arccos(\cos x) = \begin{cases} -x, & -\pi \le x \le 0 \\ x, & 0 \le x \le \pi, \end{cases}$$

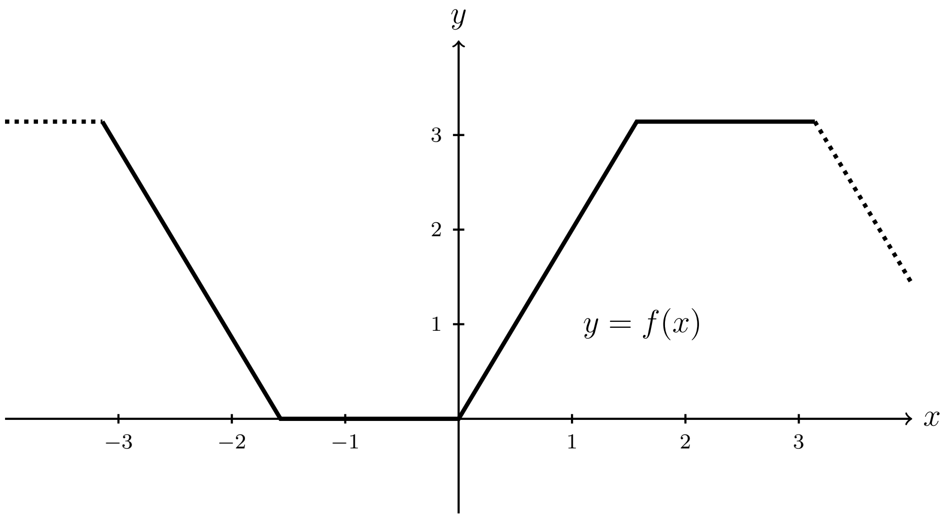
samt

$$\arcsin(\sin x) = \begin{cases} -\pi - x, & -\pi \le x \le -\dfrac{\pi}{2}, \\ x, & -\dfrac{\pi}{2} \le x \le \dfrac{\pi}{2}, \\ \pi - x, & \dfrac{\pi}{2} \le x \le \pi. \end{cases}$$

Vi erhåller alltså att

$$\arcsin(\sin x) + \arccos(\cos x) = \begin{cases} -(\pi + 2x), & -\pi \le x \le -\dfrac{\pi}{2}, \\ 0, & -\dfrac{\pi}{2} \le x \le 0, \\ 2x, & 0 \le x \le \dfrac{\pi}{2}, \\ \pi, & \dfrac{\pi}{2} \le x \le \pi. \end{cases}$$

Det kan även vara intressant att notera att funktion $f(x) = \arcsin(\sin x) + \arccos(\cos x)$ är periodisk med perioden 2π samt att grafen ser ut enligt nedan.



Svar: (a) se ovan (b) se ovan.

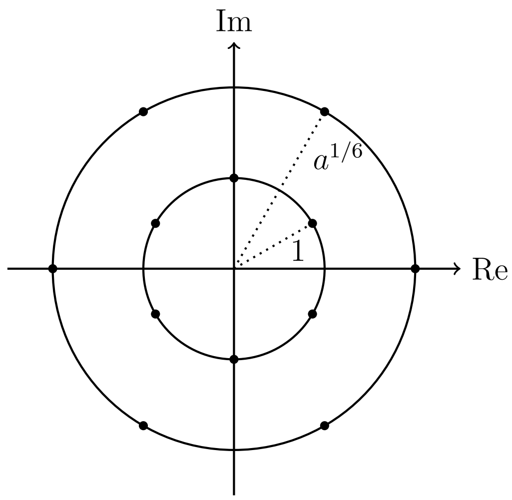
7. Ekvationen kan formuleras om enligt

$$0 = z^{12} + (1-a)z^6 - a = z^6(z^6+1) - a(z^6+1) = \left(z^6+1\right)\left(z^6-a\right).$$

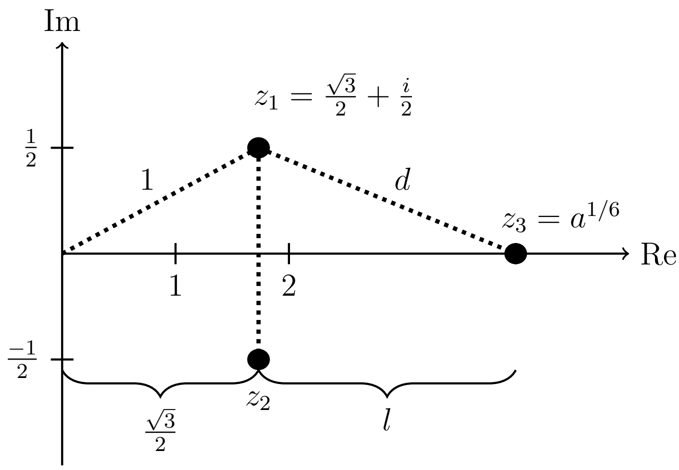
Lösningarna till $z^6 + 1 = 0$ fås genom att skriva $z = re^{i\theta}$, $r \ge 0$, $\theta \in \mathbf{R}$:

$$z^6 = -1 \quad \Leftrightarrow \quad r^6 e^{i6\theta} = e^{i\pi} \quad \Leftrightarrow \quad \begin{cases} r^6 = 1,\ r \ge 0, \\ 6\theta = \pi + 2\pi n,\ n \in \mathbf{Z}, \end{cases}$$

så $z = \exp\left(i\left(\frac{\pi}{6} + \frac{\pi n}{3}\right)\right)$, $n = 0, 1, 2, 3, 4, 5$, räknar upp lösningarna till ekvationen $z^6 = -1$. På motsvarande sätt finner vi lösningarna till $z^6 = a$ enligt uttrycket $z = a^{1/6}\exp\left(i\frac{\pi n}{3}\right)$ med $n = 0, 1, 2, 3, 4, 5$. Samtliga lösningar ligger alltså på två koncentriska cirklar, en med radie 1 och en med radie $a^{1/6}$.



Av symmetriskäl räcker det att betrakta avstånden mellan de tre lösningar som ligger närmast positiva realaxeln.



Vi ser direkt att $|z_1 - z_2| = 1$, så lösningar på den inre cirkeln ligger minst på avståndet ett från varandra. Eftersom $a > 1$ kommer motsvarande att gälla för lösningar på den yttre cirkeln. Vad gäller då avståndet mellan två lösningar på olika cirklar? Kravet är att $d \geq 1$, vilket innebär att $l \geq \dfrac{\sqrt{3}}{2}$. Då följer det att

$$a^{1/6} \geq \frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2} = \sqrt{3} \quad \Leftrightarrow \quad a \geq 3^{6/2} = 27.$$

Vi kan även visa detta direkt genom att undersöka avståndet mellan z_1 och z_3:

$$|z_1 - z_3| = \sqrt{\left(\frac{\sqrt{3}}{2} - a^{1/6}\right)^2 + \left(\frac{1}{2} - 0\right)^2},$$

så om det avståndet ska vara minst ett måste

$$\begin{aligned} 1 \leq |z_1 - z_3| \quad &\Leftrightarrow \quad 1 \leq |z_1 - z_3|^2 = \frac{3}{4} - \sqrt{3}a^{1/6} + a^{1/3} + \frac{1}{4} = 1 - \sqrt{3}a^{1/6} + a^{1/3} \\ &\Leftrightarrow \quad \sqrt{3}a^{1/6} \leq a^{1/3} \quad \Leftrightarrow \quad \sqrt{3} \leq a^{1/6} \quad \Leftrightarrow \quad 27 \leq a. \end{aligned}$$

Svar: $a \geq 27$.