

Lösningsförslag TATM79 2018-09-10

1. (a) Vi ser att

$$\sum_{k=3}^{122} \frac{(-1)^k}{2^{2k}} = \sum_{k=3}^{122} \left(-\frac{1}{4}\right)^k.$$

Summan är alltså geometrisk med $122 - 3 + 1 = 120$ termer, kvoten $-1/4$ och första term $(-1/4)^3$, så

$$\sum_{k=3}^{122} \left(-\frac{1}{4}\right)^k = -\frac{1}{4^3} \cdot \frac{1 - \left(-\frac{1}{4}\right)^{120}}{1 + \frac{1}{4}} = -\frac{1}{4^3} \cdot \frac{1 - \frac{1}{4^{120}}}{\frac{5}{4}} = \frac{1}{80} \left(\frac{1}{4^{120}} - 1\right).$$

- (b) Låt $z = a + ib$ (med $a, b \in \mathbf{R}$). Då gäller att

$$\begin{aligned} 3z - i\bar{z} = 2 + \operatorname{Re} z &\Leftrightarrow 3(a + bi) - i(a - bi) = 2 + a \Leftrightarrow 2a - b + i(3b - a) = 2 \\ &\Leftrightarrow \begin{cases} 2a - b = 2, \\ 3b - a = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} b = 2/5, \\ a = 6/5. \end{cases} \end{aligned}$$

Alltså finns det precis en lösning: $z = \frac{6}{5} + \frac{2i}{5}$.

- (c) Vi ska välja 10 av 14 pålägg och ordningen spelar ingen roll. Då finns det

$$\binom{14}{10} = \binom{14}{4} = \frac{14 \cdot 13 \cdot 12 \cdot 11}{4 \cdot 3 \cdot 2} = 1001$$

olika sorter.

Svar. (a) $\frac{1}{80} \left(\frac{1}{4^{120}} - 1\right)$ (b) $z = \frac{6}{5} + \frac{2i}{5}$ (c) 1001.

2. Först skriver vi om olikheten för att få något som är enklare att studera:

$$\begin{aligned} \frac{4}{x+4} + \frac{1}{x-2} \leq 1 &\Leftrightarrow \frac{4(x-2) + x+4 - (x+4)(x-2)}{(x+4)(x-2)} \leq 0 \\ &\Leftrightarrow \frac{-x^2 + 3x + 4}{(x+4)(x-2)} \leq 0 \Leftrightarrow \frac{(x-4)(x+1)}{(x+4)(x-2)} \geq 0. \end{aligned}$$

Observera att vi ändrade riktningen på olikheten i sista steget. Vi gör ett teckenschema för det funna uttrycket.

	-4	-1	2	4
$x+4$	- 0 +	+	+	+
$x+1$	-	- 0 +	+	+
$x-2$	-	-	- 0 +	+
$x-4$	-	-	-	- 0 +
$\frac{(x-4)(x+1)}{(x+4)(x-2)}$	+ 0	- 0 +	0	- 0 +

Vi ser ur tabellen att uttrycket är icke-negativt precis då $x < -4$, $-1 \leq x < 2$ eller $x \geq 4$.

Svar: $x < -4$ eller $-1 \leq x < 2$ eller $x \geq 4$.

3. Beloppen definieras enligt

$$|x - 3| = \begin{cases} 3 - x, & x \leq 3, \\ x - 3, & x \geq 3 \end{cases} \quad \text{och} \quad |2 + x| = \begin{cases} -(2 + x), & x \leq -2, \\ 2 + x, & x \geq -2. \end{cases}$$

Intressanta punkter för de olika beloppen som ingår i ekvationen är $x = -2$ och $x = 3$. Vi delar upp i tre olika fall.

Fall 1: $x \leq -2$. Då är

$$|x - 3| - 2|2 + x| = x + 1 \Leftrightarrow (3 - x) + 2(2 + x) = x + 1 \Leftrightarrow 7 = 1,$$

vilket innebär att det inte kan finnas någon lösning när $x \leq -2$.

Fall 2: $-2 \leq x \leq 3$. Då är

$$|x - 3| - 2|2 + x| = x + 1 \Leftrightarrow (3 - x) - 2(2 + x) = x + 1 \Leftrightarrow x = -\frac{1}{2},$$

vilket ligger i rätt intervall. Alltså är $x = -\frac{1}{2}$ en lösning.

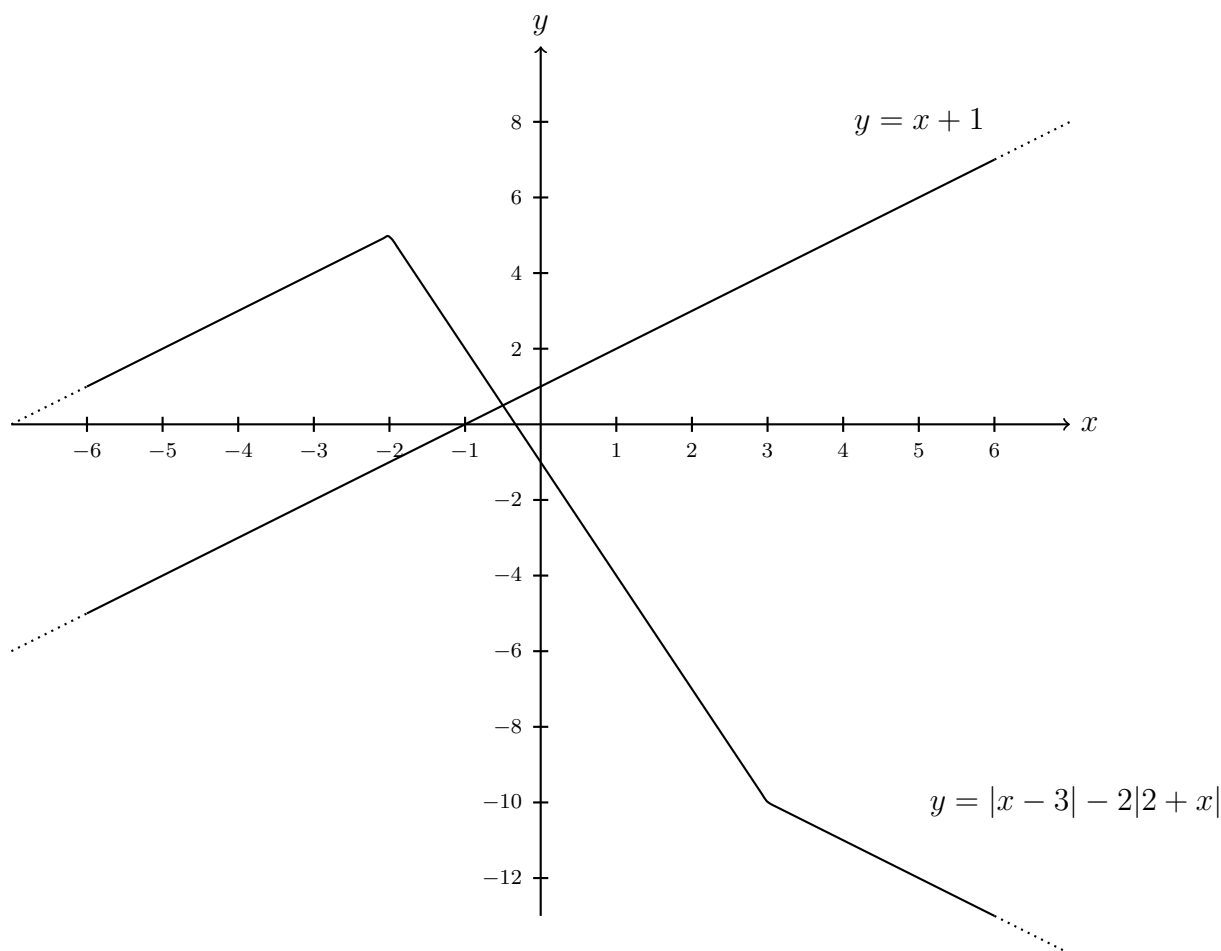
Fall 3: $x \geq 3$. Då är

$$|x - 3| - 2|2 + x| = x + 1 \Leftrightarrow x - 3 - 2(2 + x) = x + 1 \Leftrightarrow x = -4,$$

vilket *inte* ligger i rätt intervall. Alltså ingen lösning.

Svar: $x = -\frac{1}{2}$.

Man kan även skissa vänster- och högerled i en graf för att se om svaret verkar rimligt.



4. Vi ser att

$$\begin{aligned} iz^2 + (4 + 2i)z = 6i &\Leftrightarrow z^2 + (2 - 4i)z = 6 \\ &\Leftrightarrow (z + 1 - 2i)^2 = 6 + (1 - 2i)^2 = 3 - 4i. \end{aligned}$$

Låt $w = z + 1 - 2i$. Vi löser

$$w^2 = 3 - 4i, \quad (1)$$

genom att låta $w = a + bi$. Detta leder till att

$$w^2 = (a + bi)^2 = a^2 - b^2 + 2iab = 3 - 4i.$$

Likhet gäller precis då real- respektive imaginärdelarna av ekvationen är lika, så

$$a^2 - b^2 = 3 \quad (2)$$

och

$$ab = -2. \quad (3)$$

Observera även att (1) medför att

$$|w^2| = |3 - 4i| = \sqrt{9 + 16} = 5$$

och eftersom $|w^2| = |w|^2 = a^2 + b^2$ vet vi nu att

$$a^2 + b^2 = 5. \quad (4)$$

Genom att addera ekvation (2) och ekvation (4) ser vi att

$$2a^2 = 8 \quad \Leftrightarrow \quad a = \pm 2.$$

Om $a = 2$ blir $b = -1$ och om $a = -2$ blir $b = 1$ (enligt ekvation (3)). Vi har alltså lösningarna

$$w = 2 - i \quad \text{och} \quad w = -2 + i$$

till ekvation (1). Eftersom $z = w - 1 + 2i$ följer det att

$$z = 1 + i \quad \text{och} \quad z = -3 + 3i$$

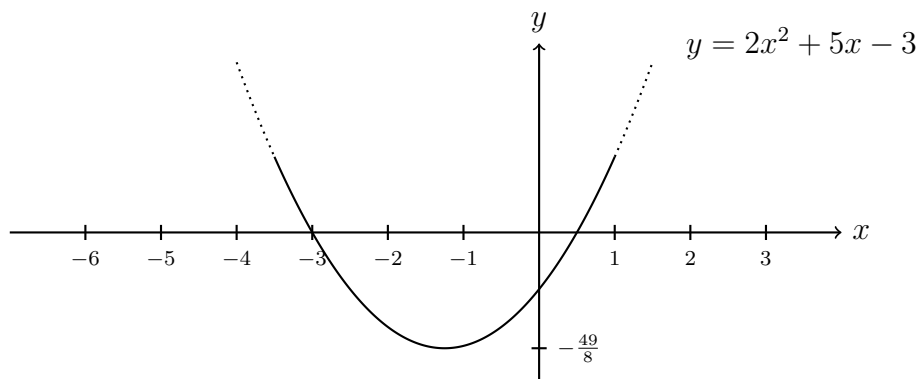
är lösningarna till ekvationen.

Svar: $z = 1 + i$, $z = -3 + 3i$.

5. Eftersom

$$2x^2 + 5x - 3 = 2 \left(x^2 + \frac{5}{2}x - \frac{3}{2} \right) = 2 \left(x + \frac{5}{4} \right)^2 - \frac{49}{8}$$

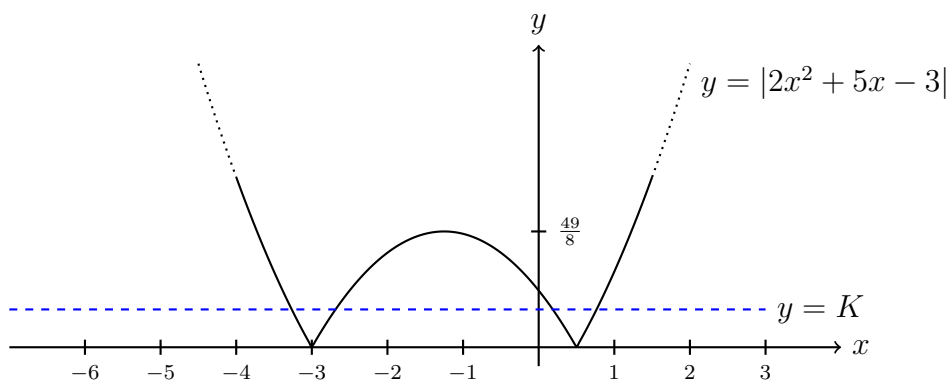
kan vi rita hur polynomet $y = 2x^2 + 5x - 3$ ser ut.



Grafen för funktionen $y = |2x^2 + 5x - 3|$ erhåller vi genom att spegla de delar där polynomet $2x^2 + 5x - 3$ är negativt i x -axeln. Ifrån kvadratkompletteringen ovan följer det att

$$2x^2 + 5x - 3 = 0 \quad \Leftrightarrow \quad x = -3 \text{ eller } x = \frac{1}{2}.$$

Alltså får vi följande utseende.



Vi ser direkt att det saknas lösningar när $K < 0$. När $K = 0$ finns precis två lösningar (där polynomet skär x -axeln). För $0 < K < 49/8$ så finns det precis 4 lösningar. När $K = 49/8$ kommer linjen $y = K$ precis tangera där $x = -5/4$, så det finns i detta fall 3 lösningar. För $K > 49/8$ har vi två lösningar.

Alternativt. Vi kan även studera hur lösningarna ser ut mer direkt. Givetvis saknas lösningar om $K < 0$ eftersom beloppet alltid är större än lika med noll. Så antag att $K \geq 0$. Då gäller att

$$\begin{aligned} |2x^2 + 5x - 3| = K &\Leftrightarrow 2x^2 + 5x - 3 = \pm K \Leftrightarrow \left(x + \frac{5}{4}\right)^2 - \frac{25}{16} - \frac{3}{2} = \pm \frac{K}{2} \\ &\Leftrightarrow \left(x + \frac{5}{4}\right)^2 = \frac{49 \pm 8K}{16}. \end{aligned}$$

Om $K = 0$ får vi precis två lösningar. När $0 < 8K < 49$ finns det precis fyra lösningar (två från $+8K$ och två från $-8K$). När $8K = 49$ blir det precis tre lösningar då $49 - 8K = 0$ bara ger en lösning. När $8K > 49$ kommer vi endast att få lösningar med $+8K$, vilket resulterar i två lösningar.

Svar:

$$\begin{aligned} K < 0 : & \quad \text{Inga lösningar,} \\ K = 0 : & \quad \text{Två lösningar,} \\ 0 < K < \frac{49}{8} : & \quad \text{Fyra lösningar,} \\ K = \frac{49}{8} : & \quad \text{Tre lösningar,} \\ K > \frac{49}{8} : & \quad \text{Två lösningar.} \end{aligned}$$