Lösningsförslag TATM79 2018-09-22

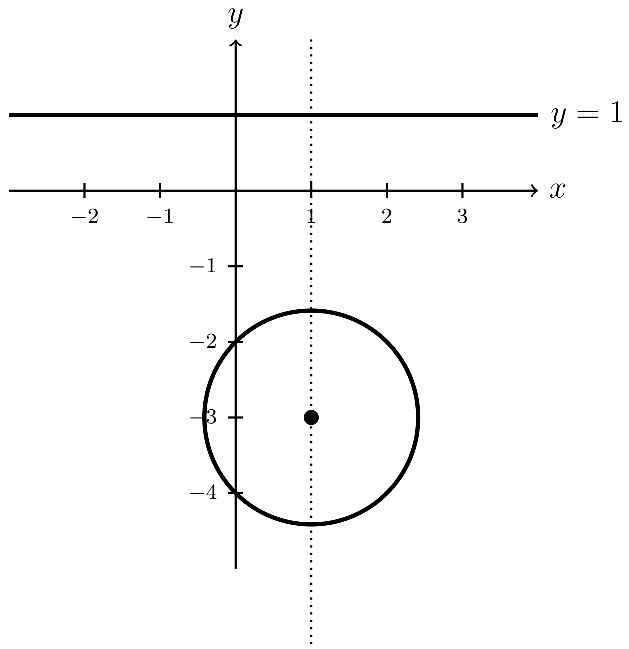
1. (a) Summan är aritmetisk med $209 - 10 + 1 = 200$ termer, så

$$\sum_{k=10}^{209} (2-k) = \frac{-8-207}{2} \cdot 200 = -21500.$$

(b) Vi kvadratkompletterar uttrycket och finner att

$$x^2 + y^2 = 2x - 6y - 8 \quad \Leftrightarrow \quad (x-1)^2 + (y+3)^2 = 2.$$

Cirkelns mittpunkt är således $(1, -3)$ och radien $\sqrt{2}$:



Vi ser i figuren att det kortaste avståendet mellan cirkeln och linjen $y = 1$ ges av det lodräta avståndet mellan punkten $(1, 1)$ och cirkelns "topp." Eftersom cirkeln har radien $\sqrt{2}$ och avståndet mellan x-axeln och cirkelns mittpunkt är 3, blir det eftersökta avståndet

$$1 + 3 - \sqrt{2} = 4 - \sqrt{2}.$$

Svar. (a) -21500 (b) medelpunkt $(1, -3)$, radie $\sqrt{2}$, avstånd $4 - \sqrt{2}$.

2. Låt oss stuva om i ekvationen för att sedan kvadrera båda leden (observera att det då bara blir en implikation!):

$$\begin{aligned} 3x = \sqrt{6x+13} - 5 \quad &\Leftrightarrow \quad \sqrt{6x+13} = 3x + 5 \\ &\Rightarrow \quad 6x + 13 = (3x+5)^2 = 9x^2 + 30x + 25 \\ &\Leftrightarrow \quad 9x^2 + 24x + 12 = 9\left(x + \frac{2}{3}\right)(x+2) = 0 \\ &\Leftrightarrow \quad x = -\frac{2}{3} \quad \text{eller} \quad x = -2. \end{aligned}$$

Eftersom vi har en implikation **måste** svaren testas. Om $x = -2$ ser vi att

$$\text{VL} = -6 \text{ och } \text{HL} = \sqrt{-12+13} - 5 = \sqrt{1} - 5 = 1 - 5 = -4$$

så $x = -2$ är *inte* en lösning. Om $x = -\dfrac{2}{3}$ är

$$\mathrm{VL} = -2 \text{ och } \mathrm{HL} = \sqrt{-6 \cdot \frac{2}{3} + 13} - 5 = \sqrt{9} - 5 = 3 - 5 = -2.$$

Eftersom vänsterled och högerled stämmer överens så är $x = -\dfrac{2}{3}$ en lösning.

Svar: $x = -\dfrac{2}{3}$.

3. Först skriver vi om olikheten för att få något som är enklare att studera:

$$\begin{aligned}\frac{4x-4}{4x^2-4x-3} < \frac{1}{x-2} \quad &\Leftrightarrow \quad 0 < \frac{1}{x-2} - \frac{4x-4}{(2x+1)(2x-3)} \\ &\Leftrightarrow \quad 0 < \frac{8x-11}{(x-2)(2x+1)(2x-3)}.\end{aligned}$$

Vi gör ett teckenschema för det funna uttrycket.

		$-\frac{1}{2}$		$\frac{11}{8}$		$\frac{3}{2}$		2	
$2x+1$	$-$	0	$+$		$+$		$+$		$+$
$8x-11$	$-$		$-$	0	$+$		$+$		$+$
$2x-3$	$-$		$-$		$-$	0	$+$		$+$
$x-2$	$-$		$-$		$-$		$-$	0	$+$
$\dfrac{8x-11}{(x-2)(2x+1)(2x-3)}$	$+$	☠	$-$	0	$+$	☠	$-$	☠	$+$

Vi ser ur tabellen att uttrycket är positivt precis då $x < -\dfrac{1}{2}$ eller $\dfrac{11}{8} < x < \dfrac{3}{2}$ eller $x > 2$.

Svar: $x < -\dfrac{1}{2}$ eller $\dfrac{11}{8} < x < \dfrac{3}{2}$ eller $x > 2$.

4. Från ledningen vet vi att det finns en rot $z = a(1+i)$ för något $a \in \mathbf{R}$. Då måste

$$\begin{aligned}0 = p(a+ai) &= 2a^4(1+i)^4 - 10a^3(1+i)^3 + 15a^2(1+i)^2 + 50a(1+i) - 125 \\ &= -8a^4 - 20a^3(-1+i) + 30ia^2 + 50a(1+i) - 125 \\ &\Leftrightarrow \quad \begin{cases} -8a^4 + 20a^3 + 50a - 125 = 0, \\ -20a^3 + 30a^2 + 50a = 0, \end{cases}\end{aligned}$$

där vi delat upp i real- och imaginärdel. Imaginärdelen ser vi direkt har $a = 0$ som ett nollställe så vi börjar med att ge oss på den:

$$0 = -20a^3 + 30a^2 + 50a = -20a\left(a^2 - \frac{3}{2}a - \frac{5}{2}\right) \quad \Leftrightarrow \quad a = 0 \text{ eller } a = \frac{3 \pm 7}{4}.$$

Vi ser att varken $a = 0$ eller $a = -1$ löser ekvationen för realdelen:

$$-8a^4 + 20a^3 + 50a - 125 = 0,$$

men att $a = 5/2$ är en lösning även till denna ekvation. Eftersom koefficienterna i polynomet är reella kommer även $z = a(1-i)$ att vara en rot. Således erhåller vi två nollställen $z = \dfrac{5}{2}(1 \pm i)$. Detta medför att $z^2 - 5z + \dfrac{25}{2}$ är en faktor i $p(z)$. Polynomdivision visar att

$$p(z) = \left(z^2 - 5\,z + \frac{25}{2}\right)\left(2z^2 - 10\right).$$

Eftersom $2z^2 - 10 = 2\left(z - \sqrt{5}\right)\left(z + \sqrt{5}\right)$ blir faktoriseringen

$$p(z) = 2\left(z - \frac{5}{2}(1+i)\right)\left(z - \frac{5}{2}(1-i)\right)\left(z - \sqrt{5}\right)\left(z + \sqrt{5}\right).$$

Alternativt. Man även utföra en polynomdivision av $p(z)$ med faktorn $z^2 - 2az + 2a^2$. Om $z = a(1 \pm i)$ är rötter till polynomet måste denna faktor förekomma. Man erhåller då ett vilkor på a som leder till att $a = 5/2$ precis som ovan.

Svar: $p(z) = 2\left(z - \dfrac{5}{2}(1+i)\right)\left(z - \dfrac{5}{2}(1-i)\right)\left(z - \sqrt{5}\right)\left(z + \sqrt{5}\right)$.

5. Eftersom

$$\frac{1}{\sqrt{k+2}+\sqrt{k}} = \frac{\sqrt{k+2}-\sqrt{k}}{(\sqrt{k+2}+\sqrt{k})(\sqrt{k+2}-\sqrt{k})} = \frac{\sqrt{k+2}-\sqrt{k}}{k+2-k} = \frac{\sqrt{k+2}}{2} - \frac{\sqrt{k}}{2}$$

så kan summan skrivas

$$\begin{aligned}
\sum_{k=0}^{98} \frac{1}{\sqrt{k+2}+\sqrt{k}} &= \frac{1}{2}\left(\sum_{k=0}^{98}\sqrt{k+2} - \sum_{k=0}^{98}\sqrt{k}\right) \\
&= \frac{1}{2}\left(\sqrt{2} + \sqrt{3} + \cdots + \sqrt{97} + \sqrt{98} + \sqrt{99} + \sqrt{100}\right) \\
&\quad -\frac{1}{2}\left(\sqrt{0} + \sqrt{1} + \sqrt{2} + \sqrt{3} + \cdots + \sqrt{97} + \sqrt{98}\right) \\
&= /\text{ teleskopsumma } / = \frac{1}{2}\left(\sqrt{99} + \sqrt{100} - \sqrt{1}\right) = \frac{9+\sqrt{99}}{2}.
\end{aligned}$$

Svar: $\dfrac{9+\sqrt{99}}{2}$.