Lösningsförslag TATM79 2018-10-01

1. (a) Låt oss stuva om i ekvationen för att sedan kvadrera båda leden (observera att det då bara blir en implikation!):

$$\begin{aligned}
\sqrt{12-2x^2}-x=4 \quad &\Leftrightarrow \quad \sqrt{12-2x^2}=4+x \\
&\Rightarrow \quad 12-2x^2=(4+x)^2=16+8x+x^2 \\
&\Leftrightarrow \quad 3x^2+8x+4=3\left(x+\frac{2}{3}\right)(x+2)=0 \\
&\Leftrightarrow \quad x=-\frac{2}{3} \quad \text{eller} \quad x=-2.
\end{aligned}$$

Eftersom vi har en implikation **måste** svaren testas. Om $x=-2$ ser vi att

$$\text{VL}=\sqrt{12-8}+2=\sqrt{4}+2=4$$

så $x=-2$ är en lösning. Om $x=-\frac{2}{3}$ är

$$\text{VL}=\sqrt{12-2\cdot\frac{4}{9}}+\frac{2}{3}=\sqrt{\frac{100}{9}}+\frac{2}{3}=\frac{12}{3}=4.$$

Eftersom vänsterled och högerled stämmer överens även här så är $x=-\frac{2}{3}$ en lösning.

(b) Vi delar upp summan i två delar som var och en är geometriska med $101-2+1=100$ termer. Den första summan har 4^2 som första term och kvoten 4 medan den andra summan har 2^2 som första term och kvoten 2:

$$\begin{aligned}
\sum_{k=2}^{101}(4^k+2^k)=\sum_{k=2}^{101}4^k+\sum_{k=2}^{101}2^k &= 4^2\cdot\frac{4^{100}-1}{4-1}+2^2\cdot\frac{2^{100}-1}{2-1} \\
&= \frac{16}{3}\left(4^{100}-1\right)+4(2^{100}-1)=\frac{1}{3}4^{102}+2^{102}-\frac{28}{3}.
\end{aligned}$$

Svar: (a) $x=-2$ eller $x=-\frac{2}{3}$ (b) $\frac{1}{3}4^{102}+2^{102}-\frac{28}{3}$.

2. (a) För att alla logaritmer i ekvationen ska vara definierade krävs att $x>-4$ och $x<8$. Dessutom får inte $x=7$ eftersom $\ln(8-7)=0$. Antag att x uppfyller dessa villkor. Då gäller (eftersom ln är injektiv) att

$$\begin{aligned}
\frac{\ln(x+4)}{\ln(8-x)}=2 \quad &\Leftrightarrow \quad \ln(x+4)=2\ln(8-x)=\ln(8-x)^2 \\
&\Leftrightarrow \quad x+4=(8-x)^2=64-16x+x^2 \quad \Leftrightarrow \quad x^2-17x+60=0 \\
&\Leftrightarrow \quad x=\frac{17}{2}\pm\frac{7}{2},
\end{aligned}$$

där $x=12$ inte uppfyller att $x<8$ men $x=5$ uppfyller samtliga villkor.

(b) Låt $t=e^x>0$. Vi kan då skriva ekvationen som

$$t-\frac{4}{t}=3 \quad \Leftrightarrow \quad t^2-3t-4=0 \quad \Leftrightarrow \quad t=4 \text{ eller } t=-1.$$

Eftersom $t>0$ så kan endast $t=4$ ge en lösning:

$$4=t=e^x \quad \Leftrightarrow \quad x=\ln 4.$$

Svar: (a) $x=5$ (b) $x=\ln 4$.

3. (a) Eftersom

$$\sin 3x = \cos\left(\frac{\pi}{2} - 3x\right)$$

så gäller att

$$\cos 2x = \sin 3x \quad \Leftrightarrow \quad \cos 2x = \cos\left(\frac{\pi}{2} - 3x\right) \quad \Leftrightarrow \quad \pm 2x = \frac{\pi}{2} - 3x + 2\pi n,$$

så

$$5x = \frac{\pi}{2} + 2\pi n \quad \Leftrightarrow \quad x = \frac{\pi}{10} + \frac{2\pi n}{5}, \quad n \in \mathbf{Z},$$

eller

$$x = \frac{\pi}{2} + 2\pi n, \quad n \in \mathbf{Z}.$$

Notera att vinklarna $\frac{\pi}{2} + 2\pi n$ redan finns med bland de första vinklarna vi fick fram, så det räcker med svaret $\frac{\pi}{10} + \frac{2\pi n}{5}$, $n \in \mathbf{Z}$.

(b) Då $\cos^2 x + \sin^2 x = 1$ så gäller att

$$\sin v = \pm\sqrt{1 - \left(\frac{1}{5}\right)^2} = \pm\frac{\sqrt{24}}{5} = \pm\frac{2\sqrt{6}}{5}$$

om $\cos v = \frac{1}{5}$. Alltså måste

$$\sin 2v = 2\sin v \cos v = \pm\frac{4\sqrt{6}}{25}$$

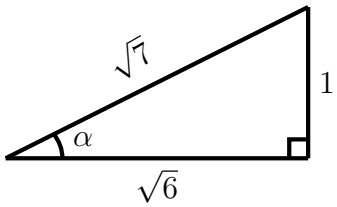
och

$$\cos 2v = 2\cos^2 v - 1 = \frac{2}{25} - 1 = -\frac{23}{25}.$$

(c) Vi vet att $\arctan(-t) = -\arctan(t)$ och $\sin(-t) = -\sin t$, så

$$\sin\left(\arctan\left(-\frac{1}{\sqrt{6}}\right)\right) = -\sin\left(\arctan\left(\frac{1}{\sqrt{6}}\right)\right).$$

Eftersom $\alpha = \arctan\left(\frac{1}{\sqrt{6}}\right) \in \left]0, \frac{\pi}{2}\right[$ kan vi direkt rita upp en rätvinklig hjälptriangel där $\tan\alpha = \frac{1}{\sqrt{6}}$. Ifrån denna triangel ser vi att $\sin\alpha = \frac{1}{\sqrt{7}}$.



Med andra ord gäller att $\sin\left(\arctan\left(-\frac{1}{\sqrt{6}}\right)\right) = -\sin(\alpha) = -\frac{1}{\sqrt{7}}$.

Svar: (a) $x = \frac{\pi}{10} + \frac{2\pi n}{5}$, $n \in \mathbf{Z}$, (b) $\sin 2v = \pm\frac{4\sqrt{6}}{25}$ och $\cos 2v = -\frac{23}{25}$, (c) $-\frac{1}{\sqrt{7}}$.

4. Vi använder oss av hjälpvinkelmetoden och skriver om vänsterledet som $C\sin(3x + v)$ med $C > 0$. Då ska alltså, enligt additionsformeln för sinus,

$$C\sin(3x + v) = C\left(\sin 3x \cos v + \cos 3x \sin v\right) = \sin 3x - \cos 3x$$

Genom att, till exempel, låta $x = 0$ och $x = \pi/6$, erhåller vi sambanden

$$\begin{cases} C\sin v &= -1, \\ C\cos v &= 1. \end{cases}$$

För att bestämma C kvadrerar vi dessa ekvationer och summerar för att finna att

$$C^2 = C^2(\sin^2 v + \cos^2 v) = 2.$$

Alltså är $C = \sqrt{2}$ ett lämpligt val, och vi finner v genom att lösa

$$\begin{cases} \cos v &= \dfrac{1}{\sqrt{2}}, \\ \sin v &= \dfrac{-1}{\sqrt{2}} \end{cases} \quad \Leftrightarrow \quad v = -\frac{\pi}{4} + 2n\pi,\ n \in \mathbf{Z}.$$

Vi väljer $v = -\dfrac{\pi}{4}$. Vi ska nu lösa ekvationen

$$\sqrt{2}\sin\left(3x - \frac{\pi}{4}\right) = 1 \quad \Leftrightarrow \quad \sin\left(3x - \frac{\pi}{4}\right) = \frac{1}{\sqrt{2}}$$

$$\Leftrightarrow \quad \begin{cases} 3x - \dfrac{\pi}{4} = \dfrac{\pi}{4} + 2n\pi,\ n \in \mathbf{Z}, \\ \quad \text{eller} \\ 3x - \dfrac{\pi}{4} = \dfrac{3\pi}{4} + 2n\pi,\ n \in \mathbf{Z}. \end{cases}$$

Vi erhåller alltså lösningarna

$$x = \frac{\pi}{6} + \frac{2n\pi}{3} \qquad \text{eller} \qquad x = \frac{\pi}{3} + \frac{2n\pi}{3}$$

för $n \in \mathbf{Z}$.

Svar: $x = \dfrac{\pi}{6} + \dfrac{2\pi n}{3}$, $n \in \mathbf{Z}$, eller $x = \dfrac{\pi}{3} + \dfrac{2\pi n}{3}$, $n \in \mathbf{Z}$.

5. Vi börjar med att reda ut största möjliga definitionsmängd. För att logaritmen ska vara definierad måste vi kräva att

$$\frac{2x-1}{x+3} > 0 \quad \Leftrightarrow \quad x < -3 \quad \text{eller} \quad x > \frac{1}{2}.$$

Detta kan ses med hjälp av tex en teckentabell:

		-3		$\frac{1}{2}$	
$x+3$	$-$	0	$+$		$+$
$2x-1$	$-$		$-$	0	$+$
$\dfrac{2x-1}{x+3}$	$+$	☠	$-$	0	$+$

Vidare så får nämnaren inte bli noll, vilket sker precis då

$$\ln\left(\frac{2x-1}{x+3}\right) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \frac{2x-1}{x+3} = 1 \quad \Leftrightarrow \quad x = 4.$$

Definitionsmängden blir således

$$D_f = \left]-\infty,\, -3\right[\,\cup\, \left]\frac{1}{2},\, 4\right[\,\cup\, \left]4,\, \infty\right[.$$

För $x \in D_f$ gäller att

$$y = \frac{1}{\ln\left(\frac{2x-1}{x+3}\right)} \quad \Leftrightarrow \quad \ln\left(\frac{2x-1}{x+3}\right) = \frac{1}{y} \quad \Leftrightarrow \quad \frac{2x-1}{x+3} = \exp\left(\frac{1}{y}\right)$$

$$\Leftrightarrow \quad x\left(2 - \exp\left(\frac{1}{y}\right)\right) = 1 + 3\exp\left(\frac{1}{y}\right) \quad \Leftrightarrow \quad x = \frac{1 + 3\exp\left(\frac{1}{y}\right)}{2 - \exp\left(\frac{1}{y}\right)}.$$

Alltså kommer ett uttryck för inversen att ges av $f^{-1}(y) = \dfrac{1 + 3\exp\left(\frac{1}{y}\right)}{2 - \exp\left(\frac{1}{y}\right)}$.

Svar: $D_f = \left]-\infty,\, -3\right[\,\cup\, \left]\frac{1}{2},\, 4\right[\,\cup\, \left]4,\, \infty\right[$ och $f^{-1}(y) = \dfrac{1 + 3\exp\left(\frac{1}{y}\right)}{2 - \exp\left(\frac{1}{y}\right)}$.

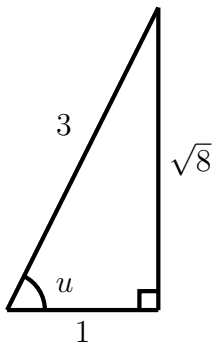
6. Additionsformeln för tangens visar att

$$\tan\left(2\arctan\left(\sqrt{2}\right) + \arccos\left(\frac{1}{3}\right)\right) = \frac{\tan\left(2\arctan\left(\sqrt{2}\right)\right) + \tan\left(\arccos\left(\frac{1}{3}\right)\right)}{1 - \tan\left(2\arctan\left(\sqrt{2}\right)\right)\tan\left(\arccos\left(\frac{1}{3}\right)\right)}.$$

Genom att utnyttja additionsformeln igen följer det att

$$\tan\left(2\arctan\left(\sqrt{2}\right)\right) = \frac{2\sqrt{2}}{1 - \sqrt{2}\cdot\sqrt{2}} = -2\sqrt{2}.$$

Att hitta $\tan(\arccos(1/3))$ är lite värre, men inte så mycket. Låt $u = \arccos(1/3)$. Då är $\cos u = 1/3$ och $0 < u < \pi/2$. Vi ritar en rätvinklig triangel med lämpliga katetlängder. Ur denna ser vi direkt att att $\tan(u) = \sqrt{8}$:



Alltså kommer

$$\tan\left(2\arctan\left(\sqrt{2}\right) + \arccos\left(\frac{1}{3}\right)\right) = 0.$$

Då

$$\tan v = 0 \quad \Leftrightarrow \quad v = n\pi,\ n \in \mathbf{Z},$$

så måste

$$2\arctan\left(\sqrt{2}\right) + \arccos\left(\frac{1}{3}\right) = n\pi$$

för något heltal n. Vi uppskattar storleken på ingående arcusfunktioner:

$$\frac{\pi}{4} < \arctan\left(\sqrt{2}\right) < \frac{\pi}{2} \quad \text{och} \quad 0 < \arccos\left(\frac{1}{3}\right) < \frac{\pi}{2}.$$

Här har vi använt att arctan är strängt växande, arccos är strängt avtagande, samt kända standardvinklar. Alltså är

$$\frac{\pi}{2} < 2\arctan\left(\sqrt{2}\right) + \arccos\left(\frac{1}{3}\right) < \pi + \frac{\pi}{2} = \frac{3\pi}{2}$$

Det följer nu att $n = 1$ är nödvändigt.

Svar: π.

7. Eftersom $\sin(2kx) = \mathrm{Im}(e^{i2kx})$ så gäller att

$$\sum_{k=1}^{n} \sin 2kx = \sum_{k=1}^{n} \mathrm{Im}\left(e^{i2kx}\right) = \mathrm{Im}\left(\sum_{k=1}^{n} e^{i2kx}\right) = \mathrm{Im}\left(e^{i2x} \cdot \frac{e^{i2nx} - 1}{e^{i2x} - 1}\right),$$

där vi utnyttjat att summan blir geometrisk med n termer, kvoten e^{i2x} samt första termen e^{i2x}. Den sista likheten gäller under förutsättning att $e^{i2x} \neq 1$, det vill säga när $x \neq m\pi$, $m \in \mathbf{Z}$. Vi kan nu skriva

$$\begin{aligned} e^{i2x} \cdot \frac{e^{i2nx} - 1}{e^{i2x} - 1} &= e^{i2x} \cdot \frac{e^{inx}}{e^{ix}} \cdot \frac{e^{inx} - e^{-inx}}{e^{ix} - e^{-ix}} = e^{i(n+1)x} \cdot \frac{2i \sin nx}{2i \sin x} \\ &= (\cos(n+1)x + i\sin(n+1)x) \cdot \frac{\sin nx}{\sin x}. \end{aligned}$$

Den eftersökta imaginärdelen ges således av

$$\frac{\sin(n+1)x \sin nx}{\sin x},$$

vilket var vad vi ville visa.

Svar: Se ovan.