Lösningsförslag TATM79 2018-10-25

1. (a) Låt $p(x) = -17 - (x-3)^2 = -x^2 + 6x - 26$. Från den kvadratkompletterade formen ser vi att $p(x) \leq -17$ för alla $x \in \mathbf{R}$ och att $p(3) = -17$.

   (b) Vi förlänger med konjugaten och ser att

$$\frac{1}{2+3i} + \frac{i}{2i-3} = \frac{2-3i}{13} + \frac{i(-2i-3)}{13} = \frac{4-6i}{13},$$

   så imaginärdelen ges således av $-\dfrac{6}{13}$.

   (c) Vi sorterar termerna och faktoriserar:

$$\begin{aligned}\frac{1}{x} > x \quad &\Leftrightarrow \quad 0 < \frac{1}{x} - x = \frac{1-x^2}{x} = \frac{(1-x)(1+x)}{x} = -\frac{(x-1)(x+1)}{x} \\ &\Leftrightarrow \quad \frac{(x-1)(x+1)}{x} < 0.\end{aligned}$$

   En teckentabell:

		-1		0		1	
$x+1$	$-$	0	$+$		$+$		$+$
x	$-$		$-$	0	$+$		$+$
$x-1$	$-$		$-$		$-$	0	$+$
$\dfrac{(x-1)(x+1)}{x}$	$-$	0	$+$	☠	$-$	0	$+$

   Vi ser i tabellen att uttrycket är negativt precis då $x < -1$ eller $0 < x < 1$.

Svar: (a) $-x^2 + 6x - 26$ (b) $-\dfrac{6}{13}$ (c) $x < -1$ eller $0 < x < 1$.

2. (a)

$$\sin\left(2\alpha + \frac{\pi}{5}\right) = \sin\left(5\alpha - \frac{9\pi}{10}\right) \quad \Leftrightarrow \quad \begin{cases} 2\alpha + \dfrac{\pi}{5} = 5\alpha - \dfrac{9\pi}{10} + 2\pi n, \ n \in \mathbf{Z} \\ \qquad \text{eller} \\ 2\alpha + \dfrac{\pi}{5} = \pi - \left(5\alpha - \dfrac{9\pi}{10}\right) + 2\pi n, \ n \in \mathbf{Z} \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \quad \begin{cases} 3\alpha = \dfrac{11\pi}{10} - 2\pi n, \ n \in \mathbf{Z} \\ \quad \text{eller} \\ 7\alpha = \dfrac{17\pi}{10} + 2\pi n, \ n \in \mathbf{Z}. \end{cases} \quad \Leftrightarrow \quad \begin{cases} \alpha = \dfrac{11\pi}{30} - \dfrac{2\pi n}{3}, \ n \in \mathbf{Z} \\ \text{eller} \\ \alpha = \dfrac{17\pi}{70} + \dfrac{2\pi n}{7}, \ n \in \mathbf{Z}. \end{cases}$$

   (b)

$$\cos v = \frac{1}{5} \quad \Leftrightarrow \quad v = \pm \arccos\left(\frac{1}{5}\right) + 2\pi n, \quad n \in \mathbf{Z}.$$

   (c) Eftersom $\sin\left(\dfrac{\pi}{2} - t\right) = \cos t$ så är

$$\sin\left(\frac{\pi}{2} - \arcsin\left(\frac{1}{3}\right)\right) = \cos\left(\arcsin\left(\frac{1}{3}\right)\right).$$

Låt $v = \arcsin\left(\frac{1}{3}\right)$. Då är $0 < v < \frac{\pi}{2}$ och eftersom $\cos^2 v + \sin^2 v = 1$, så följer det att $\cos v = \sqrt{1 - \sin^2 v}$ eftersom $\cos v > 0$ är nödvändigt. Alltså blir

$$\cos v = \sqrt{1 - \left(\sin\left(\arcsin\left(\frac{1}{3}\right)\right)\right)^2} = \sqrt{1 - \left(\frac{1}{3}\right)^2} = \sqrt{\frac{8}{9}} = \frac{2\sqrt{2}}{3}.$$

Svar: (a) $\alpha = \frac{11\pi}{30} - \frac{2\pi n}{3}$, $n \in \mathbf{Z}$, eller $\alpha = \frac{17\pi}{70} + \frac{2\pi n}{7}$, $n \in \mathbf{Z}$
(b) $v = \pm \arccos\left(\frac{1}{5}\right) + 2\pi n$, $n \in \mathbf{Z}$ (c) $\frac{2\sqrt{2}}{3}$.

3. (a) Låt $t = 2^x$. Då gäller att

$$8^x - 4^{x+1/2} = 3(2^x - 2) \quad \Leftrightarrow \quad t^3 - 2t^2 = 3t - 6 \quad \Leftrightarrow \quad t^3 - 2t^2 - 3t + 6 = 0.$$

Vi gissar en rot och finner att $t = 2$ löser ekvationen. Polynomdivision visar sedan att $t^3 - 2t^2 - 3t + 6 = (t-2)(t^2 - 3)$, så de resterande lösningarna ges av $t = \pm\sqrt{3}$. Alternativt kan vi se detta genom

$$t^3 - 2t^2 = 3t - 6 \quad \Leftrightarrow \quad t^2(t-2) = 3(t-2) \quad \Leftrightarrow \quad t = 2 \text{ eller } t^2 = 3.$$

Eftersom $t > 0$ så ger $t = -\sqrt{3}$ ingen lösning. För $t = \sqrt{3}$ gäller att

$$2^x = \sqrt{3} \quad \Leftrightarrow \quad x = \frac{\ln\sqrt{3}}{\ln 2} = \frac{\ln 3}{2\ln 2}$$

och för $t = 2$ gäller att

$$2^x = 2 \quad \Leftrightarrow \quad x = 1.$$

(b) För att alla logaritmer i ekvationen ska vara definierade krävs att

$$x^2 + 2x + 1 = (x+1)^2 > 0 \quad \Leftrightarrow \quad x \neq -1,$$

att $x > -1$, samt att $x > 1$. Vi måste alltså kräva att $x > 1$. För dessa x gäller att

$$\frac{\ln(x+1)^2}{\ln(x+1)} = \ln(x-1) \quad \Leftrightarrow \quad \frac{2\ln(x+1)}{\ln(x+1)} = \ln(x-1) \quad \Leftrightarrow \quad 2 = \ln(x-1)$$
$$\Leftrightarrow \quad e^2 = x - 1 \quad \Leftrightarrow \quad x = 1 + e^2,$$

som uppfyller kravet.

Svar: (a) $x = \frac{\ln 3}{2\ln 2}$ eller $x = 1$ (b) $x = 1 + e^2$.

4. (a) Två Euler-omskrivningar visar att

$$\cos x \cdot \sin 3x = \left(\frac{e^{ix} + e^{-ix}}{2}\right)\left(\frac{e^{i3x} - e^{-i3x}}{2i}\right) = \frac{1}{2}\left(\frac{e^{i4x} - e^{-i2x} + e^{i2x} - e^{-i4x}}{2i}\right)$$
$$= \frac{1}{2}\left(\sin 4x + \sin 2x\right),$$

och

$$\cos 6x \cdot \sin 2x = \left(\frac{e^{i6x} + e^{-i6x}}{2}\right)\left(\frac{e^{i2x} - e^{-i2x}}{2i}\right) = \frac{1}{2}\left(\frac{e^{i8x} - e^{i4x} + e^{-i4x} - e^{-i8x}}{2i}\right)$$
$$= \frac{1}{2}\left(\sin 8x - \sin 4x\right),$$

så

$$\cos x \cdot \sin 3x + \cos 6x \cdot \sin 2x = \frac{1}{2}\left(\sin 8x + \sin 2x\right).$$

(b) Enligt definitionerna gäller att

$$u = \arccos(\cos 3) \quad\Leftrightarrow\quad \begin{cases} \cos u = \cos 3, \\ u \in [0, \pi], \end{cases} \quad\Leftrightarrow\quad \begin{cases} u = \pm 3 + 2\pi n,\ n \in \mathbf{Z}, \\ u \in [0, \pi] \end{cases}$$
$$\Leftrightarrow\quad u = 3$$

och

$$v = \arcsin(\sin 3) \quad\Leftrightarrow\quad \begin{cases} \sin v = \sin 3, \\ v \in [-\pi/2, \pi/2], \end{cases}$$
$$\Leftrightarrow\quad \begin{cases} v = 3 + 2\pi n,\ n \in \mathbf{Z},\ \text{eller } v = \pi - 3 + 2\pi n,\ n \in \mathbf{Z}, \\ v \in [-\pi/2, \pi/2]. \end{cases}$$
$$\Leftrightarrow\quad v = \pi - 3.$$

Alltså kommer

$$\tan\left(1 + \frac{\arcsin(\sin 3)}{\arccos(\cos 3)}\right) = \tan\left(1 + \frac{\pi - 3}{3}\right) = \tan\left(\frac{\pi}{3}\right) = \sqrt{3}.$$

Svar: (a) $\frac{1}{2}(\sin 8x + \sin 2x)$ (b) $\sqrt{3}$

5. Vi börjar med att hitta definitionsmängden D_f. För att den inre logaritmen ska vara definierad så måste $1 + 2x > 0$. För att nästa logaritm ska vara definierad måste

$$1 - \ln(1+2x) > 0 \quad\Leftrightarrow\quad \ln(1+2x) < 1 \quad\Leftrightarrow\quad 0 < 1+2x < e \quad\Leftrightarrow\quad -\frac{1}{2} < x < \frac{1}{2}(e-1)$$

eftersom ln är strängt växande. Alltså kommer D_f ges av

$$D_f = \left]-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}(e-1)\right[.$$

För $x \in D_f$ så gäller att

$$\begin{aligned} y = f(x) \quad&\Leftrightarrow\quad y = \ln(1 - \ln(1+2x)) \quad\Leftrightarrow\quad e^y = 1 - \ln(1+2x) \\ &\Leftrightarrow\quad \ln(1+2x) = 1 - e^y \quad\Leftrightarrow\quad 1 + 2x = \exp(1 - e^y) \\ &\Leftrightarrow\quad x = \frac{1}{2}(\exp(1 - e^y) - 1). \end{aligned}$$

Alltså kommer

$$f^{-1}(y) = \frac{1}{2}(\exp(1 - e^y) - 1).$$

Svar: $D_f = \left]-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}(e-1)\right[$ och $f^{-1}(y) = \frac{1}{2}(\exp(1 - e^y) - 1)$.

6. Det komplexa talet $3i - \sqrt{3}$ ligger i andra kvadranten (Rita!) och kan skrivas

$$3i - \sqrt{3} = 2\sqrt{3}e^{i2\pi/3}.$$

På samma sätt (Rita!) (i tredje kvadranten),

$$-3 - 3i = 3\sqrt{2}e^{i5\pi/4}.$$

Detta medför att

$$\left(3i-\sqrt{3}\right)(-3-3i)=6\sqrt{6}e^{i\pi(2/3+5/4)}=6\sqrt{6}e^{i23\pi/12}=6\sqrt{6}e^{-i\pi/12}.$$

Låt nu $z-3-3i=w$ och $w=re^{i\varphi}$, där $r\geq 0$ och $\varphi\in\mathbf{R}$. Då måste

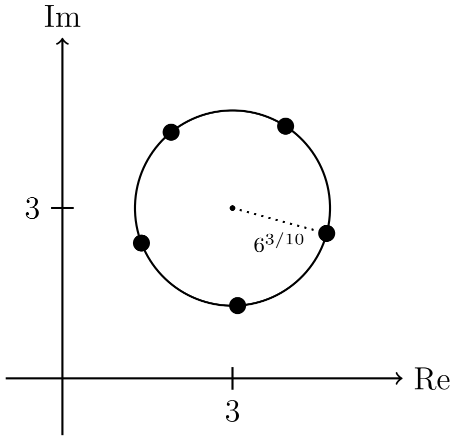
$$w^5=r^5e^{i5\theta}=6\sqrt{6}\,e^{-i\pi/12}\quad\Leftrightarrow\quad\begin{cases}r^5=6\sqrt{6}=6^{3/2},\ r\geq 0,\\ 5\theta=-\pi/12+2\pi n,\ n\in\mathbf{Z}.\end{cases}\tag{1}$$

Detta visar att $r=6^{3/10}$ och $\varphi=-\dfrac{\pi}{60}+\dfrac{2n\pi}{5}$, $n\in\mathbf{Z}$.

Eftersom $z=3+3i+w$ blir nu våra lösningar

$$z=3+3i+6^{3/10}\,e^{i\left(-\frac{\pi}{60}+\frac{2n\pi}{5}\right)},\quad n=0,1,2,3,4.$$

Här har vi valt att endast numrera de lösningar som är unika (när $n=5$ får vi samma lösning som när $n=0$ etc). Observera dock att för ekvivalensen i ekvation (1) **måste** vi ha $n\in\mathbf{Z}$ godtycklig.



Svar: $z=3+3i+6^{3/10}\,e^{i\left(-\frac{\pi}{60}+\frac{2n\pi}{5}\right)}$, $n=0,1,2,3,4$.

7. Om vi betraktar formeln $\sin 2x=2\sin x\cos x$, så ser vi att

$$\sin x=2\sin\frac{x}{2}\cos\frac{x}{2}=2^2\sin\frac{x}{4}\cos\frac{x}{4}\cos\frac{x}{2}=\cdots=2^n\sin\frac{x}{2^n}\cos\frac{x}{2^n}\cdot\ldots\cdot\cos\frac{x}{2}.$$

Om vi antar att $2^{-n}x\neq k\pi$ för alla $k\in\mathbf{Z}$, så kan vi dela med $2^n\sin\dfrac{x}{2^n}$ och erhåller då att

$$\frac{\sin x}{2^n\sin\frac{x}{2^n}}=\cos\frac{x}{2^n}\cdot\cos\frac{x}{2^{n-1}}\cdot\ldots\cdot\cos\frac{x}{2}.$$

Alltså ges ekvationen i uppgiften av

$$\begin{aligned}\frac{\sin x}{2^n\sin\frac{x}{2^n}}=2^{-n}\quad&\Leftrightarrow\quad\sin x=\sin\frac{x}{2^n}\\ &\Leftrightarrow\quad x=\frac{x}{2^n}+2\pi m\text{ eller }x=\pi-\frac{x}{2^n}+2\pi m,\end{aligned}$$

där $m\in\mathbf{Z}$ och vi antar att $2^{-n}x\neq k\pi$ för alla $k\in\mathbf{Z}$. Vi erhåller alltså att

$$x=\frac{x}{2^n}+2\pi m\quad\Leftrightarrow\quad x\left(1-\frac{1}{2^n}\right)=2\pi m\quad\Leftrightarrow\quad x=\frac{2\pi m}{1-2^{-n}}=\frac{2^{n+1}\pi m}{2^n-1}$$

eller

$$x=\pi-\frac{x}{2^n}+2\pi m\quad\Leftrightarrow\quad x\left(1+\frac{1}{2^n}\right)=\pi(2m+1)\quad\Leftrightarrow\quad x=\frac{\pi(2m+1)}{1+2^{-n}}=\frac{2^n\pi(2m+1)}{2^n+1}.$$

Det återstår att reda ut när dessa lösningar träffar multipler $2^n k\pi$ för $k \in \mathbf{Z}$ eftersom dessa inte är lösningar. Detta faktum följer av att alla cos-faktorer blir 1 eller -1. Vi ser att

$$\frac{2\pi m}{1-2^{-n}} = 2^n \pi k \quad \Leftrightarrow \quad k(2^n - 1) = 2m,$$

så $k = 2p$ för något $p \in \mathbf{Z}$ är nödvändigt. Således måste vi kräva att $m \neq p(2^n - 1)$ för alla $p \in \mathbf{Z}$. På liknande sätt ser vi att

$$\frac{\pi(2m+1)}{1+2^{-n}} = 2^n \pi k \quad \Leftrightarrow \quad k(2^n + 1) = 2m + 1,$$

så $k = 2p + 1$ för något $p \in \mathbf{Z}$. I så fall gäller att

$$(2^n + 1)(2p + 1) = 2m + 1 \quad \Leftrightarrow \quad 2^{n+1} p + 2^n + 2p = 2m \quad \Leftrightarrow \quad m = p(2^n + 1) + 2^{n-1}.$$

Vi måste alltså kräva att $m \neq p(2^n + 1) + 2^{n-1}$.

Svar: $x = \pi \dfrac{2^{n+1} m}{2^n - 1}$, $m \in \mathbf{Z}$ så att $m \neq p(2^n - 1)$ för alla $p \in \mathbf{Z}$ eller $x = \pi \dfrac{2^n(2m+1)}{2^n + 1}$, $m \in \mathbf{Z}$ så att $m \neq p(2^n + 1) + 2^{n-1}$ för alla $p \in \mathbf{Z}$.