Lösningsförslag 2019-08-20

1. (a) Låt oss stuva om i ekvationen för att sedan kvadrera båda leden (observera att det då bara blir en implikation!):

$$\begin{aligned} 2x + \sqrt{x^2+24} = 3 \quad &\Leftrightarrow \quad \sqrt{x^2+24} = 3 - 2x \\ &\Rightarrow \quad x^2 + 24 = (3-2x)^2 = 9 - 12x + 4x^2 \\ &\Leftrightarrow \quad x^2 - 4x - 5 = 0 \\ &\Leftrightarrow \quad x = -1 \quad \text{eller} \quad x = 5. \end{aligned}$$

Eftersom vi har en implikation **måste** svaren testas. Om $x = -1$ ser vi att

$$\text{VL} = 2 \cdot (-1) + \sqrt{(-1)^2 + 24} = -2 + \sqrt{25} = -2 + 5 = 3$$

så $x = -1$ är en lösning. Om $x = 5$ är

$$\text{VL} = 2 \cdot 5 + \sqrt{5^2 + 24} = 10 + \sqrt{49} = 17.$$

Eftersom vänsterled och högerled inte stämmer överens är detta ingen lösning.

(b) Enligt binomialsatsen så gäller att

$$\begin{aligned} \left(\frac{x}{2} - \frac{2}{x}\right)^5 &= \sum_{k=0}^{5} \binom{5}{k} \left(\frac{x}{2}\right)^{5-k} \left(-\frac{2}{x}\right)^k \\ &= \sum_{k=0}^{5} \binom{5}{k} x^{5-k}\, 2^{k-5}\, 2^k\, (-1)^k\, x^{-k} \\ &= 2^{-5} \sum_{k=0}^{5} \binom{5}{k} (-4)^k x^{5-2k} \\ &= \frac{1}{32}\left(x^5 - 20x^3 + 160x - 640x^{-1} + 1280x^{-3} - 1024x^{-5}\right) \\ &= \frac{1}{32}x^5 - \frac{5}{8}x^3 + 5x - \frac{20}{x} + \frac{40}{x^3} - \frac{32}{x^5}. \end{aligned}$$

Svar: (a) $x = -1$ (b) $\frac{1}{32}x^5 - \frac{5}{8}x^3 + 5x - \frac{20}{x} + \frac{40}{x^3} - \frac{32}{x^5}$.

2. (a) Vi börjar med att hitta definitionsmängden D_f. För att båda logaritmerna ska vara definierade så måste

$$x + 1 > 0 \quad \Leftrightarrow \quad x > -1$$

och

$$2x - 5 > 0 \quad \Leftrightarrow \quad x > \frac{5}{2}.$$

Således ges definitionsmängden av $x > 5/2$.
För $x \in D_f$ så gäller att

$$\begin{aligned} y = f(x) \quad &\Leftrightarrow \quad y = \ln(x+1) - \ln(2x-5) = \ln\left(\frac{x+1}{2x-5}\right) \\ &\Leftrightarrow \quad e^y = \frac{x+1}{2x-5} \quad \Leftrightarrow \quad e^y(2x-5) = x + 1 \\ &\Leftrightarrow \quad x(2e^y - 1) = 1 + 5e^y \quad \Leftrightarrow \quad x = \frac{1+5e^y}{2e^y-1}. \end{aligned}$$

Alltså kommer

$$f^{-1}(y) = \frac{1+5e^y}{2e^y-1}.$$

(b) För att en lösning ska kunna existera måste $x > 0$. För $x > 0$ gäller att

$$x^{\ln x} = e^{\ln\left(x^{\ln x}\right)} = e^{(\ln x)^2}$$

så

$$x^{\ln x} = e \quad \Leftrightarrow \quad (\ln x)^2 = 1 \quad \Leftrightarrow \quad \ln x = \pm 1 \quad \Leftrightarrow \quad x = e^{\pm 1}.$$

Svar: (a) $D_f = \left]\frac{5}{2}, \infty\right[$ och $f^{-1}(y) = \dfrac{1+5e^y}{2e^y-1}$ (b) $x = e^{\pm 1}$.

3. (a) Eftersom $\tan\dfrac{\pi}{3} = \sqrt{3}$ så gäller att

$$\begin{aligned}\tan(1-x) = \sqrt{3} \quad &\Leftrightarrow \quad 1 - x = \frac{\pi}{3} + \pi n \\ &\Leftrightarrow \quad x = 1 - \frac{\pi}{3} - \pi n = 1 - \pi\left(\frac{1}{3} + n\right), \ n \in \mathbf{Z}.\end{aligned}$$

(b) Vi ser att

$$1 = 2\cos^2 x - \sin x = 2\left(1 - \sin^2 x\right) - \sin x \quad \Leftrightarrow \quad \sin^2 x + \frac{1}{2}\sin x - \frac{1}{2} = 0.$$

Låt $t = \sin x$. Ekvationen

$$t^2 + \frac{1}{2}t - \frac{1}{2} = 0$$

har lösningarna $t = -1$ och $t = 1/2$. Alltså erhåller vi

$$\sin x = -1 \quad \Leftrightarrow \quad x = -\frac{\pi}{2} + 2\pi n$$

samt

$$\sin x = \frac{1}{2} \quad \Leftrightarrow \quad x = \frac{\pi}{6} + 2\pi n \text{ eller } x = \frac{5\pi}{6} + 2\pi n.$$

Notera att lösningarna kan sammanfattas enligt $x = \dfrac{\pi}{6} + \dfrac{2\pi n}{3}$.

Svar:

(a) $x = 1 - \pi\left(\dfrac{1}{3} + n\right), \ n \in \mathbf{Z}$

(b) $-\dfrac{\pi}{2} + 2\pi n$, $x = \dfrac{\pi}{6} + 2\pi n$, eller $x = \dfrac{5\pi}{6} + 2\pi n$, $n \in \mathbf{Z}$.

4. Vi använder oss av hjälpvinkelmetoden och skriver om vänsterledet i

$$2\cos 3v - 2\sin 3v = \frac{1}{\sqrt{2}}$$

som $C\sin(3v + \varphi)$ med $C > 0$. Då ska alltså, enligt additionsformeln för sinus,

$$C\sin(3v + \varphi) = C\left(\sin 3v \cos\varphi + \cos 3x \sin\varphi\right) = 2\cos 3v - 2\sin 3v.$$

Genom att, till exempel, låta $x = 0$ och $x = \pi/6$, erhåller vi sambanden

$$\begin{cases} C\sin v &= 2, \\ C\cos v &= -2. \end{cases}$$

För att bestämma C kvadrerar vi dessa ekvationer och summerar för att finna att

$$C^2 = C^2(\sin^2\varphi + \cos^2\varphi) = 8.$$

Alltså är $C = \sqrt{8}$ ett lämpligt val, och vi finner φ genom att lösa

$$\begin{cases} \cos\varphi &= -\dfrac{2}{\sqrt{8}} = -\dfrac{1}{\sqrt{2}}, \\ \sin\varphi &= \dfrac{1}{\sqrt{2}} \end{cases} \quad \Leftrightarrow \quad \varphi = \frac{3\pi}{4} + 2n\pi,\ n \in \mathbf{Z}.$$

Vi väljer $\varphi = \dfrac{3\pi}{4}$. Vi ska nu lösa ekvationen

$$\sqrt{8}\sin\left(3v + \frac{3\pi}{4}\right) = \frac{1}{\sqrt{2}} \quad \Leftrightarrow \quad \sin\left(3v + \frac{3\pi}{4}\right) = \frac{1}{4}$$
$$\Leftrightarrow \quad \begin{cases} 3v + \dfrac{3\pi}{4} = \arcsin\left(\dfrac{1}{4}\right) + 2n\pi,\ n \in \mathbf{Z}, \\ \quad\text{eller} \\ 3v + \dfrac{3\pi}{4} = \pi - \arcsin\left(\dfrac{1}{4}\right) + 2n\pi,\ n \in \mathbf{Z}. \end{cases}$$

Vi erhåller alltså lösningarna

$$v = -\frac{\pi}{4} + \frac{1}{3}\arcsin\left(\frac{1}{4}\right) + \frac{2n\pi}{3} \qquad \text{eller} \qquad v = \frac{\pi}{12} - \frac{1}{3}\arcsin\left(\frac{1}{4}\right) + \frac{2n\pi}{3}$$

för $n \in \mathbf{Z}$.

Svar: $v = -\dfrac{\pi}{4} + \dfrac{1}{3}\arcsin\left(\dfrac{1}{4}\right) + \dfrac{2n\pi}{3}$, $n \in \mathbf{Z}$, eller $v = \dfrac{\pi}{12} - \dfrac{1}{3}\arcsin\left(\dfrac{1}{4}\right) + \dfrac{2n\pi}{3}$, $n \in \mathbf{Z}$.

5. Vi skriver nämnare och täljare för w på polär form:

$$\sqrt{3} - 3i = \sqrt{12}e^{-i\pi/3} = 2\sqrt{3}e^{-i\pi/3} \quad \text{och} \quad \sqrt{2} - i\sqrt{2} = 2e^{-i\pi/4},$$

så enligt regler för (den komplexa) exponentialfunktionen gäller att

$$w = \frac{2\sqrt{3}e^{-i\pi/3}}{2e^{-i\pi/4}} = \sqrt{3}e^{i\pi(1/4-1/3)} = \sqrt{3}e^{-i\pi/12}.$$

Vi söker nu de $z \in \mathbf{C}$ så att

$$z^5 = \sqrt{3}e^{-i\pi/12}.$$

Låt nu $z = re^{i\varphi}$, där $r \geq 0$ och $\varphi \in \mathbf{R}$. Då måste

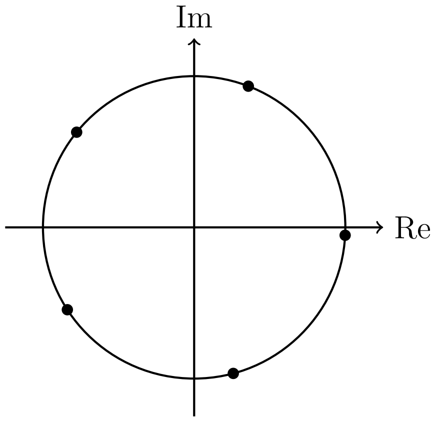
$$z^5 = r^5 e^{i5\varphi} = \sqrt{3}\,e^{-i\pi/12} \quad \Leftrightarrow \quad \begin{cases} r^5 = 3^{1/2},\ r \geq 0, \\ 5\varphi = -\pi/12 + 2\pi n,\ n \in \mathbf{Z}. \end{cases} \tag{1}$$

Detta visar att $r = 3^{1/10}$ och $\varphi = -\dfrac{\pi}{60} + \dfrac{2n\pi}{5}$, $n \in \mathbf{Z}$.

Våra lösningar blir nu

$$z = 3^{1/10}\, e^{i\left(-\frac{\pi}{60}+\frac{2n\pi}{5}\right)}, \quad n = 0, 1, 2, 3, 4.$$

Här har vi valt att endast numrera de lösningar som är unika (när $n = 5$ får vi samma lösning som när $n = 0$ etc). Observera dock att för ekvivalensen i ekvation (1) **måste** vi ha $n \in \mathbf{Z}$ godtycklig.



Svar: $w = \sqrt{3}e^{-i\pi/12}$ och $z = 3^{1/10}e^{i\left(-\frac{\pi}{60}+\frac{2n\pi}{5}\right)}$, $n = 0, 1, 2, 3, 4$.

6. (a) $D_{\cos} = \mathbf{R}$ och $V_{\cos} = [-1, 1]$ samt $D_{\arccos} = [-1, 1]$ och $V_{\arccos} = [0, \pi]$.

(b) Summan är varken aritmetisk eller geometrisk och det förefaller inte finnas något elementärt sätt att dela upp den på för att erhålla artimetiska eller geometriska summor, så vi skriver ut lite termer och undersöker om vi kan se något mönster. Summan

$$\sum_{k=2}^{100} (\arctan(k+1) - \arctan(k))$$

kan – om vi stuvar om lite – utvecklas enligt

$$\begin{aligned} &\arctan(3) + \arctan(4) + \cdots + \arctan(100) + \arctan(101) \\ &-\big(\arctan(2) + \arctan(3) + \arctan(4) + \cdots + \arctan(100)\big) \\ &= /\text{ teleskopsumma } / = \arctan(101) - \arctan(2). \end{aligned}$$

Vi kan förenkla resultatet genom att observera att

$$\tan(\arctan(101) - \arctan(2)) = \frac{101-2}{1+101\cdot 2} = \frac{99}{203}.$$

Då

$$\tan v = \frac{99}{203} \quad \Leftrightarrow \quad v = \arctan\left(\frac{99}{203}\right) + n\pi,\ n \in \mathbf{Z},$$

så måste

$$\arctan(101) - \arctan(2) = \arctan\left(\frac{99}{203}\right) + n\pi$$

för något heltal n. Vi uppskattar storleken på ingående arcusfunktioner:

$$0 < \arctan(2) < \arctan(101) < \frac{\pi}{2}.$$

Här har vi använt att arctan är strängt växande samt kända standardvinklar. Alltså:

$$0 < \arctan(101) - \arctan(2) < \frac{\pi}{2},$$

så det följer nu att $n = 0$ är nödvändigt.

Svar: (a) se ovan (b) $\arctan\left(\dfrac{99}{203}\right)$.

7. Vi börjar med att notera att, för $1 \leq k < n$, så är

$$k\binom{n}{k} = k \cdot \frac{n!}{(n-k)!\,k!} = \frac{n!}{(n-k)!\,(k-1)!} = n \cdot \frac{(n-1)!}{((n-1)-(k-1))!\,(k-1)!}$$
$$= n\binom{n-1}{k-1}.$$

Med denna likhet i bagaget kan vi således skriva om summan:

$$\begin{aligned}\sum_{k=0}^{n} k\binom{n}{k} p^k(1-p)^{n-k} &= 0 \cdot \binom{n}{0} p^0(1-p)^n + \sum_{k=1}^{n} k\binom{n}{k} p^k(1-p)^{n-k} \\ &= n\sum_{k=1}^{n} \binom{n-1}{k-1} p^k(1-p)^{n-k} \\ &= np\sum_{k=1}^{n} \binom{n-1}{k-1} p^{k-1}(1-p)^{(n-1)-(k-1)} \\ &= np\sum_{l=0}^{n-1} \binom{n-1}{l} p^{l}(1-p)^{(n-1)-l} \\ &= np\,(p+(1-p))^{n-1} = np,\end{aligned}$$

där vi utnyttjade binomialsatsen i den näst sista likheten.

Svar: $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} k\binom{n}{k} p^k(1-p)^{n-k} = np.$

Anmärkning. Det som beräknas i denna uppgift är *väntevärdet* för en slumpvariabel som är *binomialfördelad* med parametrarna n och p. Situationen är den att ett försök där en händelse inträffar med sannolikheten p upprepas precis n gånger. Varje försök upprepas oberoende av de övriga. Sannolikheten att precis k stycken av dessa n försök resulterar i att händelsen inträffar ges av just

$$\binom{n}{k} p^k(1-p)^{n-k}.$$

Ni kommer stöta på detta när ni läser en kurs i sannolikhetslära senare. I en sådan kurs får ni även högst sannolikt (...) se ett "enklare" argument för att väntevärdet blir just produkten np.