Lösningsförslag TATM79 2019-09-09

1. (a) Summan är aritmetisk med $100-2+1=99$ termer, så

$$\sum_{n=2}^{100}(2n-1)=\frac{3+199}{2}\cdot 99=101\cdot 99=9999.$$

(b) Vi ser att summan är geometrisk med $20-1+1=20$ termer, kvoten $1/9$ och första term $8\cdot 3^2$, så

$$\sum_{k=1}^{20}8{\cdot}3^{4-2k}=8{\cdot}3^4\sum_{k=1}^{20}\left(\frac{1}{9}\right)^k=8{\cdot}3^4{\cdot}\frac{1}{9}\sum_{k=0}^{19}\left(\frac{1}{9}\right)^k=8{\cdot}9\frac{1-\left(\frac{1}{9}\right)^{20}}{1-\frac{1}{9}}=81{\cdot}\left(1-\left(\frac{1}{9}\right)^{20}\right).$$

(c)

$$\operatorname{Im}\left(\frac{3}{4-i}+\frac{2}{i}\right)=\operatorname{Im}\left(\frac{3(4+i)}{17}-2i\right)=\frac{3}{17}-2=-\frac{31}{17}.$$

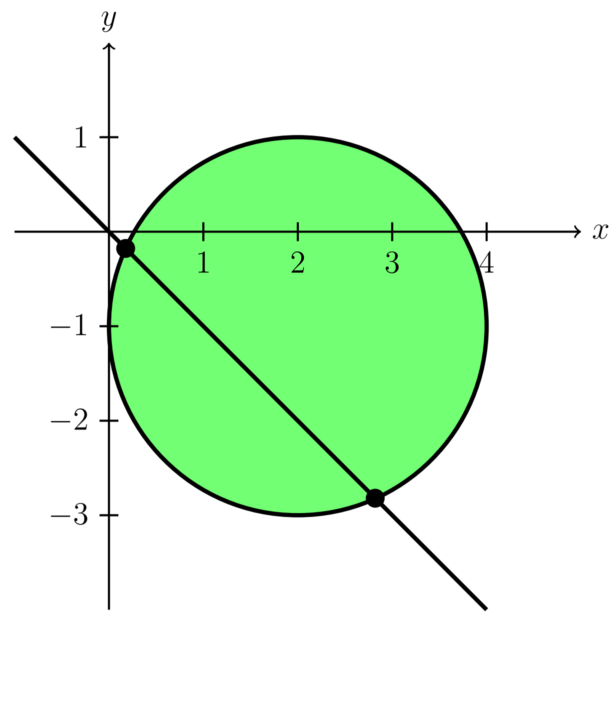
Svar: (a) 9999 (b) $81-\left(\frac{1}{3}\right)^{36}$ (c) $-\frac{31}{17}$.

2. Cirkelns ekvation ges av

$$(x-2)^2+(y+1)^2=4$$

och linjens ekvation av $y=-x$. Vid skärningspunkter mellan linje och cirkel måste båda ekvationer vara uppfyllda, så

$$\begin{aligned}(x-2)^2+(-x+1)^2=4 \quad&\Leftrightarrow\quad x^2-4x+4+x^2-2x+1=4 \quad\Leftrightarrow\quad 2x^2-6x+1=0\\ &\Leftrightarrow\quad x^2-3x+\frac{1}{2}=0 \quad\Leftrightarrow\quad \left(x-\frac{3}{2}\right)^2-\frac{9}{4}+\frac{1}{2}=0\\ &\Leftrightarrow\quad x=\frac{3}{2}\pm\frac{\sqrt{7}}{2}.\end{aligned}$$



Svar: $\left(\frac{3}{2}-\frac{\sqrt{7}}{2},\ -\frac{3}{2}+\frac{\sqrt{7}}{2}\right)$ och $\left(\frac{3}{2}+\frac{\sqrt{7}}{2},\ -\frac{3}{2}-\frac{\sqrt{7}}{2}\right)$.

3. Låt oss stuva om i ekvationen för att sedan kvadrera båda leden (observera att det då bara blir en implikation!):

$$
\begin{aligned}
2x + \sqrt{x^2 - x - 4} = 6 \quad & \Leftrightarrow \quad \sqrt{x^2 - x - 4} = 6 - 2x \\
& \Rightarrow \quad x^2 - x - 4 = (6 - 2x)^2 = 4x^2 - 24x + 36 \\
& \Leftrightarrow \quad x^2 - \frac{23}{3} + \frac{40}{3} = 0 \\
& \Leftrightarrow \quad x = \frac{23}{6} \pm \sqrt{\frac{529}{36} - \frac{40}{3}} = \frac{23}{6} \pm \frac{7}{6} \\
& \Leftrightarrow \quad x = 5 \quad \text{eller} \quad x = \frac{8}{3}.
\end{aligned}
$$

Eftersom vi har en implikation **måste** svaren testas. Om $x = 5$ ser vi att

$$\text{VL} = 10 + \sqrt{25 - 5 - 4} = 10 + \sqrt{16} = 10 + 4 = 14 \neq 6 = \text{HL},$$

så $x = 5$ är *inte* en lösning. Om $x = \frac{8}{3}$ är

$$\text{VL} = \frac{16}{3} + \sqrt{\frac{64}{9} - \frac{8}{3} - 4} = \frac{16}{3} + \sqrt{\frac{4}{9}} = \frac{16}{3} + \frac{2}{3} = \frac{18}{3} = 6 = \text{HL}.$$

Eftersom vänsterled och högerled stämmer överens så är $x = \frac{8}{3}$ en lösning.

Svar: $x = \frac{8}{3}$.

4. Först skriver vi om olikheten för att få något som är enklare att studera:

$$
\begin{aligned}
\frac{x+1}{2x+4} \geq \frac{x+1}{x^2+1} \quad & \Leftrightarrow \quad \frac{(x+1)(x^2+1)}{2x+4} - (x+1) \geq 0 \\
& \Leftrightarrow \quad \frac{(x+1)(x^2+1-(2x+4))}{2x+4} \geq 0.
\end{aligned}
$$

Notera att vi förlängde med $1 + x^2$ i första steget, vilket är OK då $1 + x^2 > 0$. Vi ser vidare att

$$x^2 + 1 - (2x + 4) = x^2 - 2x - 3 = (x + 1)(x - 3),$$

så vi ska undersöka när

$$\frac{(x+1)^2(x-3)}{2x+4} \geq 0 \quad \Leftrightarrow \quad \frac{(x+1)^2(x-3)}{x+2} \geq 0.$$

Vi gör ett teckenschema för det funna uttrycket.

		-2		-1		3	
$x+2$	$-$	0	$+$		$+$		$+$
$x+1$	$-$		$-$	0	$+$		$+$
$x+1$	$-$		$-$	0	$+$		$+$
$x-3$	$-$		$-$		$-$	0	$+$
$\frac{(x+1)^2(x-3)}{x+2}$	$+$	☠	$-$	0	$-$	0	$+$

Vi ser ur tabellen att uttrycket är icke-negativt precis då $x < -2$ eller $x = -1$ eller $3 \leq x$.

Svar: $x < -2$ eller $x = -1$ eller $x \geq 3$.

5. Vi observerar att vänsterledet i ekvationen är ett reellt tal. Således måste detta även gälla högerledet för att vi ska ha en lösning. Låt $z = x + iy$ med $x, y \in \mathbf{R}$. Eftersom

$$(1+i)z = (1+i)(x+iy) = x - y + i(x+y),$$

så måste $x + y = 0$. Lösningarna vi söker ges alltså på formen $z = x - ix = x(1-i)$. Alltså gäller att

$$\left|z^2 + \frac{1}{2}\right| = \left|x^2(1-i)^2 + \frac{1}{2}\right| = \left|-2ix^2 + \frac{1}{2}\right| = \sqrt{4x^4 + \frac{1}{4}},$$

så vi ska lösa ekvationen

$$\sqrt{4x^4 + \frac{1}{4}} = 2x.$$

Med kravet att $x \geq 0$ kan vi kvadrera med ekvivalens:

$$\begin{cases} 4x^4 + \frac{1}{4} = 4x^2, \\ x \geq 0, \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^4 - x^2 + \frac{1}{16} = \left(x^2 - \frac{1}{2}\right)^2 - \frac{1}{4} + \frac{1}{16} = 0, \\ x \geq 0, \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x^2 = \frac{1}{2} \pm \frac{\sqrt{3}}{4}, \\ x \geq 0. \end{cases}$$

Notera att högerledet är positivt (då $\sqrt{3} < 2$) för båda fallen, så

$$x = \sqrt{\frac{1}{2} \pm \frac{\sqrt{3}}{4}} = \frac{\sqrt{2 \pm \sqrt{3}}}{2}$$

är lösningarna då vi endast är intresserade av $x \geq 0$. Eftersom $z = x(1-i)$ så erhåller vi slutligen svaren

$$z = \frac{\sqrt{2 \pm \sqrt{3}}}{2}(1-i).$$

Vi kan faktiskt förenkla detta lite genom att observera att $4 \pm 2\sqrt{3} = (\sqrt{3} \pm 1)^2$ är en jämn kvadrat, så

$$z = \frac{\sqrt{3} \pm 1}{2\sqrt{2}}(1-i).$$

Svar: $z = \dfrac{\sqrt{3} \pm 1}{2\sqrt{2}}(1-i)$.