Lösningsförslag TATM79 2019-09-21

1. (a) Vi utnyttjar att $\begin{pmatrix} n \\ k \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} n \\ n-k \end{pmatrix}$ och ser att

$$\begin{pmatrix} 16 \\ 13 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 16 \\ 3 \end{pmatrix} = \frac{16 \cdot 15 \cdot 14}{3 \cdot 2} = 80 \cdot 7 = 560.$$

(b) Låt $z = x + iy$, där $x, y \in \mathbf{R}$. Då gäller att

$$\begin{aligned} 3z - (1-i)\bar{z} = i + \operatorname{Re} z \quad &\Leftrightarrow \quad 3(x+iy) - (1-i)(x-iy) = i + x \\ &\Leftrightarrow \quad 2x + y + i(4y + x) = x + i \quad \Leftrightarrow \quad \begin{cases} 2x + y = x, \\ 4y + x = 1, \end{cases} \\ &\Leftrightarrow \quad \begin{cases} y = -x, \\ -3x = 1, \end{cases} \quad \Leftrightarrow \quad \begin{cases} x = -\dfrac{1}{3}, \\ y = \dfrac{1}{3}. \end{cases} \end{aligned}$$

Lösningen ges således av $z = \dfrac{-1+i}{3}$.

(c) Vi ser att summan varken är aritmetisk eller geometrisk, men med endast 5 termer kan vi räkna ut den direkt

$$\sum_{k=1}^{5} \frac{2^k}{k} = \frac{2}{1} + \frac{2^2}{2} + \frac{2^3}{3} + \frac{2^4}{4} + \frac{2^5}{5} = 2 + 2 + \frac{8}{3} + 4 + \frac{32}{5} = \frac{256}{15}.$$

Svar: (a) 560 (b) $z = \dfrac{-1+i}{3}$ (c) $\dfrac{256}{15}$.

2. Först skriver vi om olikheten för att få något som är enklare att studera:

$$\begin{aligned} \frac{x+1}{2-x} - \frac{1}{x-1} < 3 \quad &\Leftrightarrow \quad \frac{(x+1)(x-1) - (2-x) - 3(2-x)(x-1)}{(2-x)(x-1)} < 0 \\ &\Leftrightarrow \quad \frac{4x^2 - 8x + 3}{(2-x)(x-1)} < 0 \quad \Leftrightarrow \quad \frac{(2x-1)(2x-3)}{(2-x)(x-1)} < 0. \end{aligned}$$

Vi gör ett teckenschema för det funna uttrycket.

		$\frac{1}{2}$		1		$\frac{3}{2}$		2	
$2x-1$	$-$	0	$+$		$+$		$+$		$+$
$x-1$	$-$		$-$	0	$+$		$+$		$+$
$2x-3$	$-$		$-$		$-$	0	$+$		$+$
$2-x$	$+$		$+$		$+$		$+$	0	$-$
$\dfrac{(2x-1)(2x-3)}{(2-x)(x-1)}$	$-$	0	$+$	☠	$-$	0	$+$	☠	$-$

Vi ser ur tabellen att uttrycket är negativt precis då $x < \dfrac{1}{2}$ eller $1 < x < \dfrac{3}{2}$ eller $x > 2$.

Svar: $x < \dfrac{1}{2}$ eller $1 < x < \dfrac{3}{2}$ eller $x > 2$.

3. Beloppen definieras enligt

$$|5+x| = \begin{cases} 5+x, & x \geq -5, \\ -x-5, & x \leq -5, \end{cases} \qquad \text{och} \qquad |1-2x| = \begin{cases} 1-2x, & x \leq \frac{1}{2}, \\ 2x-1, & x \geq \frac{1}{2}. \end{cases}$$

Intressanta punkter för de olika beloppen som ingår i ekvationen är $x = -5$ och $x = \frac{1}{2}$. Vi delar upp i tre olika fall.

Fall 1: $x \leq -5$. Då är

$$|5+x| - 2|1-2x| = 1 \quad \Leftrightarrow \quad -(5+x) - 2(1-2x) = 1 \quad \Leftrightarrow \quad 8 = 3x \quad \Leftrightarrow \quad x = \frac{8}{3},$$

vilket inte uppfyller att $x \leq -5$, så ingen lösning (i detta fall).

Fall 2: $-5 \leq x \leq \frac{1}{2}$. Då är

$$|5+x| - 2|1-2x| = 1 \quad \Leftrightarrow \quad 5 + x - 2(1-2x) = 1 \quad \Leftrightarrow \quad 5x = -2 \quad \Leftrightarrow \quad x = -\frac{2}{5},$$

vilket ligger i rätt intervall. Alltså är $x = -\frac{2}{5}$ en lösning.

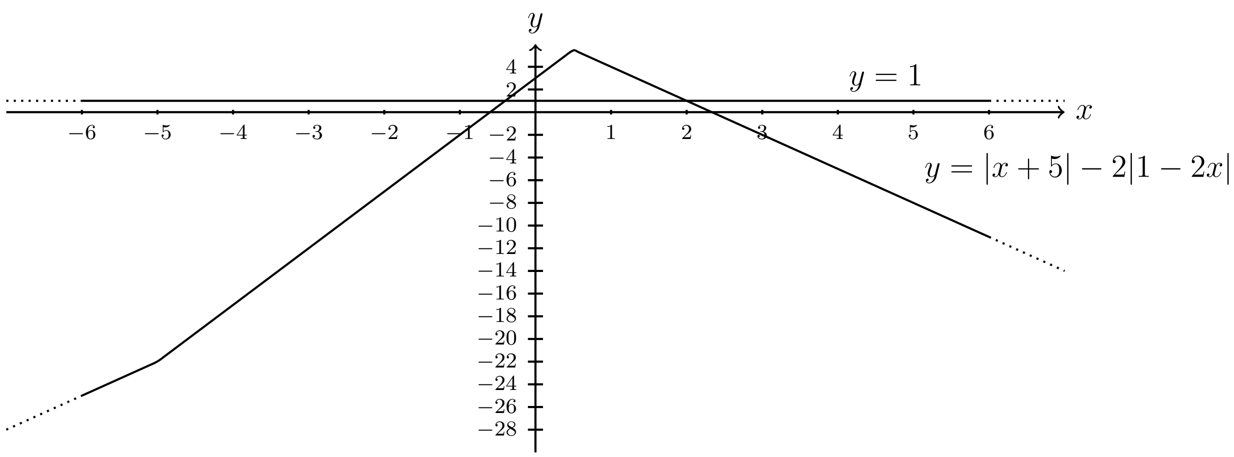
Fall 3: $x \geq \frac{1}{2}$. Då är

$$|5+x| - 2|1-2x| = 1 \quad \Leftrightarrow \quad 5 + x - 2(2x-1) = 1 \quad \Leftrightarrow \quad 6 = 3x \quad \Leftrightarrow \quad x = 2,$$

vilket ligger i rätt intervall. Alltså är $x = 2$ en lösning.

Svar: $x = -\frac{2}{5}$ och $x = 2$.

Man kan även skissa vänster- och högerled i en graf för att se om svaret verkar rimligt.



4. (a) Vi kvadratkompletterar uttrycket och finner att

$$p(x) = 2\left(\left(x + \frac{k}{4}\right)^2 - \frac{k^2}{16} + \frac{3}{2}\right) = 2\left(x + \frac{k}{4}\right)^2 - \frac{k^2}{8} + 3,$$

så för att uppnå minimum i $x = 1/2$ så måste

$$\frac{1}{2} + \frac{k}{4} = 0 \quad \Leftrightarrow \quad k = -2.$$

Alltså blir

$$p(x) = 2\left(x - \frac{1}{2}\right)^2 - \frac{4}{8} + 3 = 2\left(x - \frac{1}{2}\right)^2 + \frac{5}{2}.$$

Det minsta värdet för $p(x)$ blir således $\frac{5}{2}$.

(b) Vi söker alla $z \in \mathbf{C}$ så att

$$4z^2 + 15 + 8i = 0 \quad \Leftrightarrow \quad z^2 = -\frac{15}{4} - 2i.$$

Låt $z = a + ib$, $a, b \in \mathbf{R}$. Då måste

$$z^2 = a^2 + i2ab - b^2 = -\frac{15}{4} - 2i \quad \Leftrightarrow \quad \begin{cases} a^2 - b^2 = -\frac{15}{4}, \\ ab = -1. \end{cases}$$

Observera även att vi erhåller att

$$|z^2| = \left|-\frac{15}{4} - 2i\right| = \sqrt{\frac{225}{16} + 4} = \sqrt{\frac{289}{16}} = \frac{17}{4}$$

och eftersom $|z^2| = |z|^2 = a^2 + b^2$ vet vi nu att

$$a^2 + b^2 = \frac{17}{4}.$$

Alltså måste

$$2a^2 = -\frac{15}{4} + \frac{17}{4} = \frac{2}{4} \quad \Leftrightarrow \quad a = \pm\frac{1}{2}.$$

Om $a = \frac{1}{2}$ blir $b = -2$ och om $a = -\frac{1}{2}$ blir $b = 2$. Vi har alltså lösningarna

$$z = \frac{1}{2} - 2i \qquad \text{och} \qquad z = -\frac{1}{2} + 2i.$$

Svar: (a) $k = -2$, minsta värdet blir $\frac{5}{2}$ (b) $\frac{1}{2} - 2i$ och $-\frac{1}{2} + 2i$.

5. Polynomet $p(z)$ har reella koefficienter, så icke-reella rötter kommer alltid i form av komplexkonjugerade par. Då vi vidare vet att alla rötter är icke-reella så måste de fyra rötterna ha formen $x_0 \pm iy_0$ samt $x_1 \pm iy_1$, där $y_0 \neq 0$ och $y_1 \neq 0$. Vi kan då skriva upp faktoriseringen för $p(z)$ och expandera denna enligt

$$\begin{aligned} p(z) &= (z - (x_0 + iy_0))(z - (x_0 - iy_0))(z - (x_1 + iy_1))(z - (x_1 - iy_1)) \\ &= (z^2 - 2x_0 z + x_0^2 + y_0^2)(z^2 - 2x_1 z + x_1^2 + y_1^2) \\ &= (z^2 - 2x_0 z + 1)(z^2 - 2x_1 z + 1) \\ &= z^4 - 2(x_0 + x_1)z^3 + (2 + 4x_0 x_1)z^2 - 2(x_0 + x_1)z + 1, \end{aligned}$$

där vi utnyttjat att $x_0^2 + y_0^2 = x_1^2 + y_1^2 = 1$ då lösningarna ligger på avstånd 1 från origo. Från den här representationen för $p(z)$ kan vi direkt se att $d = 1$ samt att $a = c$. Vidare måste

$$-2 = 2 - 4 < 2 + 4x_0x_1 < 2 + 4 = 6$$

eftersom realdelarna uppfyller att $-1 < x_0 < 1$ och $-1 < x_1 < 1$ då rötterna ligger på avståndet 1 till origo men är icke-reella.

Svar: Se ovan.