Lösningsförslag TATM79 2019-09-30

1. (a) Om vi kvadratkompletterar uttrycket finner vi att

$$x^2 + y^2 = x - 3y + 2 \quad \Leftrightarrow \quad \left(x - \frac{1}{2}\right)^2 - \frac{1}{4} + \left(y + \frac{3}{2}\right)^2 - \frac{9}{4} = 2$$
$$\Leftrightarrow \quad \left(x - \frac{1}{2}\right)^2 + \left(y + \frac{3}{2}\right)^2 = \frac{18}{4} = \frac{9}{2},$$

så medelpunkten är $\left(\frac{1}{2}, -\frac{3}{2}\right)$ och radien $\frac{3}{\sqrt{2}}$.

(b) Vi ser att summan är geometrisk med $13-(-2)+1 = 16$ termer, kvoten 4 och första term 2^{-4}, så

$$\sum_{k=-2}^{13} 2^{2k} = 2^{-4} \cdot \frac{4^{16}-1}{4-1} = \frac{2^{32}-1}{48}.$$

(c) Enligt binomialsatsen så gäller att

$$\left(\frac{z}{2} - i\right)^6 = (-i)^6 \left(\frac{iz}{2} + 1\right)^6 = -\sum_{k=0}^{6} \binom{6}{k} \left(\frac{iz}{2}\right)^k 1^{6-k}$$
$$= -\left(1 + 3iz - \frac{15}{4}z^2 - \frac{5}{2}iz^3 + \frac{15}{16}z^4 + \frac{3}{16}iz^5 - \frac{1}{64}z^6\right)$$
$$= -1 - 3iz + \frac{15}{4}z^2 + \frac{5}{2}iz^3 - \frac{15}{16}z^4 - \frac{3}{16}iz^5 + \frac{1}{64}z^6$$

Svar:

(a) Medelpunkten är $\left(\frac{1}{2}, -\frac{3}{2}\right)$ och radien $\frac{3}{\sqrt{2}}$

(b) $\frac{2^{32}-1}{48}$

(c) $-1 - 3iz + \frac{15}{4}z^2 + \frac{5}{2}iz^3 - \frac{15}{16}z^4 - \frac{3}{16}iz^5 + \frac{1}{64}z^6$.

2. (a) Högerledet är definierat då $x+2>0$, $x+6>0$ och $x>0$, så låt $x>0$. Då gäller att

$$\ln(x+2) - \ln(x+6) - \ln x + \ln 9 = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \ln(9(x+2)) = \ln(x(x+6))$$
$$\Leftrightarrow \quad 9(x+2) = x(x+6)$$

ty ln är injektiv. Alltså måste

$$9x + 18 = x^2 + 6x \quad \Leftrightarrow \quad x^2 - 3x - 18 = 0 \quad \Leftrightarrow \quad x = 6 \text{ eller } x = -3.$$

Endast $x = 6$ uppfyller kravet ovan.

(b) Om $x \neq 0$ så gäller att

$$e^{\frac{1}{2}\ln x^2} = 3 \quad \Leftrightarrow \quad \frac{1}{2}\ln x^2 = \ln 3 \quad \Leftrightarrow \quad \ln x^2 = \ln 3^2 \quad \Leftrightarrow \quad x^2 = 3^2$$

ty ln är injektiv, så $x = \pm 3$.

Svar: (a) $x = 6$ (b) $x = \pm 3$.

3. (a) Vi ser direkt ur enhetscirkeln att

$$\cos(2x) = \cos\left(\frac{5\pi}{7} - 3x\right) \quad \Leftrightarrow \quad \pm 2x = \frac{5\pi}{7} - 3x + 2\pi n,\ n \in \mathbf{Z},$$

så

$$5x = \frac{5\pi}{7} + 2\pi n \quad \Leftrightarrow \quad x = \frac{\pi}{7} + \frac{2\pi n}{5}$$

eller

$$x = \frac{5\pi}{7} + 2\pi n.$$

(b) Vi ser att

$$\tan 2x = 2\sin 2x \quad \Leftrightarrow \quad \frac{\sin 2x}{\cos 2x} = 2\sin 2x \quad \Leftrightarrow \quad \sin 2x \cdot \left(\frac{1}{\cos 2x} - 2\right) = 0$$

så endera är

$$\sin 2x = 0 \quad \Leftrightarrow \quad 2x = \pi n,\ n \in \mathbf{Z}, \quad \Leftrightarrow \quad x = \frac{\pi n}{2},\ n \in \mathbf{Z},$$

eller så är

$$\frac{1}{\cos 2x} - 2 = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \frac{1 - 2\cos 2x}{\cos 2x} = 0,$$

vilket ger att

$$\cos 2x = \frac{1}{2} \quad \Leftrightarrow \quad 2x = \pm\frac{\pi}{3} + 2\pi n,\ n \in \mathbf{Z} \quad \Leftrightarrow \quad x = \pm\frac{\pi}{6} + \pi n,\ n \in \mathbf{Z}.$$

(c) Låt $v = \arccos\left(-\frac{5}{6}\right)$. Då är $v \in]\pi/2, \pi[$ ty $-5/6 < 0$ och arccos är strängt avtagande. Alltså blir

$$\cos v = -\frac{5}{6}$$

och

$$\sin^2 v = 1 - \cos^2 v = 1 - \left(-\frac{5}{6}\right)^2 = 1 - \frac{25}{36} = \frac{11}{36},$$

så

$$\sin v = \frac{\sqrt{11}}{6}$$

med positivt tecken då $\sin v > 0$ om $v \in]\pi/2, \pi[$. Alltså blir

$$\tan v = \frac{\sqrt{11}/6}{-5/6} = -\frac{\sqrt{11}}{5}.$$

Svar:

(a) $\frac{\pi}{7} + \frac{2\pi n}{5}$, $n \in \mathbf{Z}$, eller $\frac{5\pi}{7} + 2\pi n$, $n \in \mathbf{Z}$

(b) $\frac{\pi n}{2}$, $n \in \mathbf{Z}$, eller $\pm\frac{\pi}{6} + \pi n$, $n \in \mathbf{Z}$.

(c) $-\frac{\sqrt{11}}{5}$

4. Vi använder oss av hjälpvinkelmetoden och skriver om funktionen enligt

$$f(x) = 3\cos x - \sqrt{3}\sin x = C\sin(x+v),$$

med $C > 0$. Då ska alltså, enligt additionsformeln för sinus,

$$C\sin(x+v) = C(\sin x \cos v + \cos x \sin v) = 3\cos x - \sqrt{3}\sin x.$$

Genom att, till exempel, låta $x = 0$ och $x = \pi/2$, erhåller vi sambanden

$$\begin{cases} C\sin v &= 3, \\ C\cos v &= -\sqrt{3}. \end{cases}$$

För att bestämma C kvadrerar vi dessa ekvationer och summerar för att finna att

$$C^2 = C^2(\sin^2 v + \cos^2 v) = 3^2 + (-\sqrt{3})^2 = 12.$$

Alltså är $C = \sqrt{12} = 2\sqrt{3}$ ett lämpligt val, och vi finner v genom att lösa

$$\begin{cases} \cos v &= -\dfrac{1}{2}, \\ \sin v &= \dfrac{\sqrt{3}}{2} \end{cases} \quad \Leftrightarrow \quad v = \frac{2\pi}{3} + 2m\pi,\ m \in \mathbf{Z}.$$

Rita en enhetscirkel för att se detta!
Vi väljer $v = \dfrac{2\pi}{3}$. Vi kan nu representera $f(x)$ som

$$f(x) = 2\sqrt{3}\sin\left(x + \frac{2\pi}{3}\right)$$

som antar maximum precis då

$$x + \frac{2\pi}{3} = \frac{\pi}{2} + 2\pi n,\ n \in \mathbf{Z} \quad \Leftrightarrow \quad x = -\frac{\pi}{6} + 2\pi n,\ n \in \mathbf{Z}.$$

Det största värdet blir givetvis $C = 2\sqrt{3}$.
Svar: Det största värdet är $2\sqrt{3}$ vilket antas precis då $x = -\dfrac{\pi}{6} + 2n\pi$, $n \in \mathbf{Z}$.

5. (a) En Euler-omskrivning visar att

$$\begin{aligned} \sin 3x \cdot \cos 2x &= \left(\frac{e^{i3x} - e^{-i3x}}{2i}\right)\left(\frac{e^{i2x} + e^{-i2x}}{2}\right) = \frac{1}{2}\left(\frac{e^{i5x} - e^{-i5x} + e^{ix} - e^{-ix}}{2i}\right) \\ &= \frac{1}{2}(\sin 5x + \sin x). \end{aligned}$$

(b) Om $x = -\dfrac{\pi}{12}$ är en lösning så måste

$$\begin{aligned} &\sin\left(3\left(-\frac{\pi}{12}\right)\right)\cos\left(2\left(-\frac{\pi}{12}\right)\right) = \sin\left(-\frac{k\pi}{12}\right)\cos\left(3\left(-\frac{\pi}{12}\right)\right) \\ \Leftrightarrow \quad & -\frac{\sqrt{2}}{2} \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} = -\sin\left(\frac{k\pi}{12}\right)\frac{\sqrt{2}}{2} \quad \Leftrightarrow \quad \sin\left(\frac{k\pi}{12}\right) = \frac{\sqrt{3}}{2} \end{aligned}$$

vilket är ekvivalent med att

$$\begin{cases} \dfrac{k\pi}{12} = \dfrac{\pi}{3} + 2\pi m, \ m \in \mathbf{Z} \\ \quad \text{eller} \\ \dfrac{k\pi}{12} = \dfrac{2\pi}{3} + 2\pi m, \ m \in \mathbf{Z} \end{cases} \quad \Leftrightarrow \quad \begin{cases} k = 4 + 24m, \ m \in \mathbf{Z} \\ \quad \text{eller} \\ k = 8 + 24m, \ m \in \mathbf{Z}. \end{cases}$$

Endast $k = 4$ ligger i det intervall vi är intresserade av. Vi kunde givetvis också helt enkelt ha testat alla k i intervallet direkt i likheten och sett vilka som fungerade.

En till Euler-omskrivning visar att

$$\begin{aligned} \sin kx \cdot \cos 3x &= \left(\frac{e^{i4x} - e^{-i4x}}{2i}\right)\left(\frac{e^{i3x} + e^{-i3x}}{2}\right) \\ &= \frac{1}{2}\left(\frac{e^{i7x} - e^{-i7x} + e^{ix} - e^{-ix}}{2i}\right) \\ &= \frac{1}{2}(\sin 7x + \sin x). \end{aligned}$$

Med $k = 4$ så ska vi således lösa ekvationen

$$\frac{1}{2}(\sin 5x + \sin x) = \frac{1}{2}(\sin 7x + \sin x) \quad \Leftrightarrow \quad \sin 5x = \sin 7x$$

vilket gäller om och endast om

$$\begin{cases} 5x = 7x + 2\pi n, \ n \in \mathbf{Z} \\ \text{eller} \\ 5x = \pi - 7x + 2\pi n, \ n \in \mathbf{Z} \end{cases}$$

så vi erhåller lösningarna $x = -\pi n$, $n \in \mathbf{Z}$, eller $x = \dfrac{\pi}{12} + \dfrac{n\pi}{6}$, $n \in \mathbf{Z}$. Vi noterar att $n = -1$ i den andra lösningsskaran gör att vi får tillbaka $x = -\dfrac{\pi}{12}$.

Svar: (a) $\dfrac{1}{2}(\sin 5x + \sin x)$ (b) $k = 4$ och $x = -\pi n$, $n \in \mathbf{Z}$, eller $x = \dfrac{\pi}{12} + \dfrac{n\pi}{6}$, $n \in \mathbf{Z}$.

6. Med $0 < x \le 1$ så gäller att $y \ge 0$ och

$$y = f(x) \quad \Leftrightarrow \quad y = \sqrt{-\ln x} \quad \Leftrightarrow \quad y^2 = -\ln x \quad \Leftrightarrow \quad x = e^{-y^2}.$$

Funktionen $g(x) = \sin x$ med $D_g = [0, \pi[$ kan inte vara inverterbar då funktionen inte är injektiv på D_g; till exempel är $\sin \dfrac{\pi}{4} = \dfrac{1}{\sqrt{2}} = \sin \dfrac{3\pi}{4}$.

Med $h(x) = \cos x$ och $x \in D_h = [3\pi, 4\pi]$ så är

$$y = h(x) \quad \Leftrightarrow \quad y = \cos x \quad \Leftrightarrow \quad x = \pm \arccos y + 2\pi n, \ n \in \mathbf{Z}.$$

Vi noterar att $\arccos y \in [0, \pi]$ då $V_{\text{arccos}} = [0, \pi]$ (med $D_h = [3\pi, 4\pi]$), så $x = 4\pi - \arccos y$ är det enda alternativet som gör att $x \in D_h$.

Svar: $f^{-1}(y) = e^{-y^2}$, g^{-1} saknas och $h^{-1}(y) = 4\pi - \arccos y$.

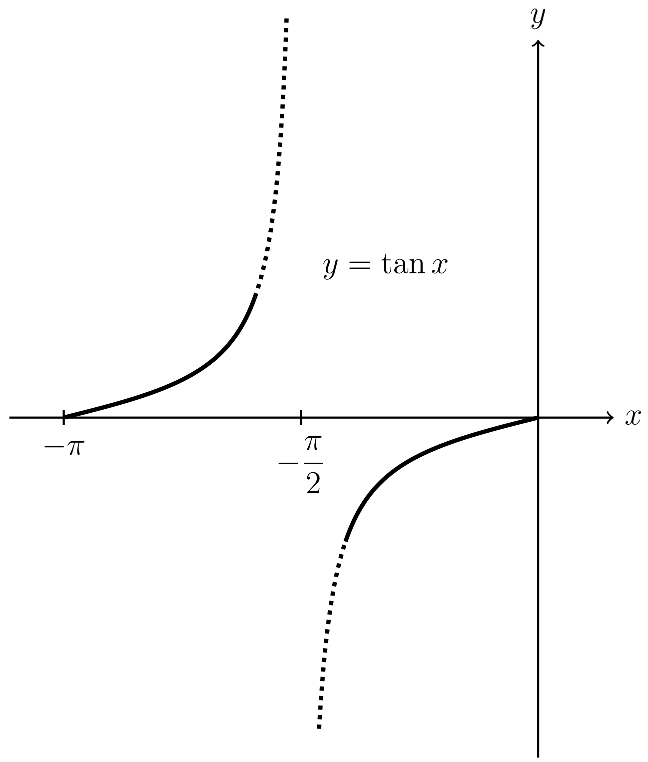
7. Först noterar vi att högerledet alltid är negativt, så för att kunna ha en lösning så måste $x < 0$. Vi antar därför att $x < 0$. Vidare ser vi att vänsterledet då kommer att befinna sig i intervallet $]-\pi, 0[$ och högerledet i intervallet $\left]-\pi, -\frac{\pi}{2}\right[$. Eftersom tan är injektiv på mängden

$$\left\{t \in \mathbf{R} : -\pi < t < 0,\ t \neq -\frac{\pi}{2}\right\},$$

så kan vi med ekvivalens (med punkten $-\pi/2$ undantagen) studera ekvationen

$$\tan\left(\arctan 3x + \arctan 5x\right) = \tan\left(-\frac{\pi}{2} + \arctan x\right).$$

För att övertyga oss om att tangens är injektiv på mängden ovan, betrakta följande figur.



En additionsformel för tangens visar att

$$\tan\left(\arctan 3x + \arctan 5x\right) = \frac{3x + 5x}{1 - 15x^2} = \frac{8x}{1 - 15x^2}, \quad x \neq \pm\frac{1}{\sqrt{15}}.$$

Vidare gäller att

$$\tan\left(-\frac{\pi}{2} + \arctan x\right) = \frac{\sin\left(-\frac{\pi}{2} + \arctan x\right)}{\cos\left(-\frac{\pi}{2} + \arctan x\right)} = \frac{-\cos(\arctan x)}{\sin(\arctan x)} = -\frac{1}{\tan(\arctan x)} = -\frac{1}{x}.$$

Notera här att vi inte kan använda additionsformeln för tangens för att hantera högerledet (varför?). Vi söker nu lösningar till

$$\frac{8x}{1 - 15x^2} = -\frac{1}{x} \quad \Leftrightarrow \quad 7x^2 = 1 \quad \Leftrightarrow \quad x = \pm\frac{1}{\sqrt{7}}$$

där endast den negativa lösningen kan vara intressant. Att $-\frac{1}{\sqrt{7}}$ faktiskt löser ursprungsekvationen följer nu av att tan är injektiv på mängden $\{t \in \mathbf{R} : -\pi < t < 0,\ t \neq -\pi/2\}$.

Svar: $x = -\frac{1}{\sqrt{7}}$.