Lösningsförslag TATM79 2019-10-31

1. (a) Vi sorterar termerna och faktoriserar:

$$2x+1 \geq \frac{1}{x+1} \quad \Leftrightarrow \quad \frac{(2x+1)(x+1)-1}{x+1} \geq 0 \quad \Leftrightarrow \quad \frac{x(2x+3)}{x+1} \geq 0.$$

En teckentabell:

		$-3/2$		-1		0	
$x+3/2$	$-$	0	$+$		$+$		$+$
$x+1$	$-$		$-$	0	$+$		$+$
x	$-$		$-$		$-$	0	$+$
$\frac{x(2x+3)}{x+1}$	$-$	0	$+$	☠	$-$	0	$+$

Vi ser i tabellen att uttrycket är icke-negativt precis då $-\frac{3}{2} \leq x < -1$ eller $x \geq 0$.

(b) Vi ser att summan är aritmetisk med $197-(-2)+1 = 200$ termer, första termen är -1 och sista är 397, så

$$\sum_{k=-2}^{197}(3+2k) = \frac{-1+397}{2} \cdot 200 = 396 \cdot 100 = 39600.$$

(c) $$\left|2+\frac{i}{1-i}\right| = \left|2+\frac{i(1+i)}{|1-i|^2}\right| = \left|2+\frac{i-1}{2}\right| = \sqrt{\left(\frac{3}{2}\right)^2+\left(\frac{1}{2}\right)^2} = \frac{\sqrt{10}}{2}.$$

Svar: (a) $-\frac{3}{2} \leq x < -1$ eller $x \geq 0$ (b) 39600 (c) $\frac{\sqrt{10}}{2}$.

2. Vi börjar med att reda ut största möjliga definitionsmängd. För att kvadratroten ska vara definierad måste vi kräva att

$$\frac{x+1}{x-4} \geq 0 \quad \Leftrightarrow \quad x \leq -1 \quad \text{eller} \quad x > 4.$$

Detta kan ses med hjälp av tex en teckentabell:

		-1		4	
$x+1$	$-$	0	$+$		$+$
$x-4$	$-$		$-$	0	$+$
$\frac{x+1}{x-4}$	$+$	0	$-$	☠	$+$

Definitionsmängden blir således

$$D_f =]-\infty,\, -1] \cup]4,\, \infty[\,.$$

För $x \in D_f$ gäller att

$$y = \sqrt{\frac{x+1}{x-4}} \quad \Rightarrow \quad y^2 = \frac{x+1}{x-4} \quad \Leftrightarrow \quad y^2(x-4) = x+1$$

$$\Leftrightarrow \quad x(y^2-1) = 1+4y^2 \quad \Leftrightarrow \quad x = \frac{1+4y^2}{y^2-1}.$$

Notera speciellt implikationen ovan! Vill vi skriva ekvivalens måste vi lägga till villkoret $y \geq 0$. Men eftersom vi finner högst en lösning för varje y, så innebär detta att ett uttryck för inversen ges av $f^{-1}(y) = \dfrac{1+4y^2}{y^2-1}$.

Svar: $D_f =]-\infty,\, -1] \cup]4,\, \infty[$, $f^{-1}(y) = \dfrac{1+4y^2}{y^2-1}$.

3. (a) Vi ser direkt ur enhetscirkeln att

$$\sin 3x = \sin\left(x + \frac{\pi}{5}\right) \quad \Leftrightarrow \quad \begin{cases} 3x = x + \dfrac{\pi}{5} + 2n\pi,\ n \in \mathbf{Z}, \\ \quad \text{eller} \\ 3x = \pi - \left(x + \dfrac{\pi}{5}\right) + 2n\pi,\ n \in \mathbf{Z}. \end{cases}$$

Vi erhåller alltså lösningarna

$$x = \frac{\pi}{10} + n\pi \qquad \text{eller} \qquad x = \frac{\pi}{5} + \frac{n\pi}{2}$$

för $n \in \mathbf{Z}$.

(b) Låt $v = \arcsin\left(\dfrac{5}{6}\right)$. Då är $v \in]0, \pi/2[$ ty $5/6 > 0$ och arcsin är strängt växande. Alltså blir

$$\sin v = \frac{5}{6}$$

och

$$\cos^2 v = 1 - \sin^2 v = 1 - \left(\frac{5}{6}\right)^2 = 1 - \frac{25}{36} = \frac{11}{36},$$

så

$$\cos v = \frac{\sqrt{11}}{6}$$

med positivt tecken då $\cos v > 0$ om $v \in]0, \pi/2[$.

(c) Ur definitionen av arccos så följer att

$$v = \arccos k \quad \Leftrightarrow \quad \begin{cases} \cos v = k, \\ 0 \leq v \leq \pi, \end{cases}$$

så därför är $\arccos(\cos k) = k$ när $k = 1, 2, 3$ och $\arccos(\cos k) = 2\pi - k$ när $k = 4, 5$, där vi använt att $3 < \pi < 4$. Således blir

$$\sum_{k=1}^{5} \arccos(\cos k) = 1 + 2 + 3 + 2\pi - 4 + 2\pi - 5 = 4\pi - 3.$$

Svar: (a) $\dfrac{\pi}{10} + n\pi$, $n \in \mathbf{Z}$, eller $\dfrac{\pi}{5} + \dfrac{n\pi}{2}$, $n \in \mathbf{Z}$ (b) $\dfrac{\sqrt{11}}{6}$ (c) $4\pi - 3$.

4. (a) Vi ser att

$$\begin{aligned} 4\sinh x - 3\cosh x = 3 \quad &\Leftrightarrow \quad 2(e^x - e^{-x}) - \frac{3}{2}\left(e^x + e^{-x}\right) = 3 \\ &\Leftrightarrow \quad \frac{1}{2}e^x - \frac{7}{2}e^{-x} = 3 \quad \Leftrightarrow \quad \frac{1}{2}e^{2x} - 3e^x - \frac{7}{2} = 0 \end{aligned}$$

Låt $t = e^x > 0$. För $t > 0$ så är

$$\frac{1}{2}t^2 - 3t - \frac{7}{2} = 0 \quad \Leftrightarrow \quad t^2 - 6t - 7 = 0 \quad \Leftrightarrow \quad t = 3 \pm 4.$$

Alltså ges den enda lösningen av $x = \ln 7$ eftersom $t = -1 < 0$.

(b) För $x > 0$ så gäller att

$$\begin{aligned}\frac{(\ln ex)^2 - \ln x^2 - 2}{1 + \ln \frac{1}{x}} &= \frac{(\ln e + \ln x)^2 - 2\ln x - 2}{1 - \ln x} \\ &= \frac{1 + 2\ln x + (\ln x)^2 - 2\ln x - 2}{1 - \ln x} \\ &= \frac{-1 + (\ln x)^2}{1 - \ln x} = \frac{(-1 + \ln x)(1 + \ln x)}{1 - \ln x} = -(1 + \ln x).\end{aligned}$$

Svar: (a) $x = \ln 7$ (b) $-(1 + \ln x)$.

5. (a) Enligt definitionen av e^{ix} för $x \in \mathbf{R}$ så gäller att

$$\begin{aligned}e^{ix}e^{iy} &= (\cos x + i \sin x)(\cos y + i \sin y) \\ &= \cos x \cos y - \sin x \sin y + i(\cos x \sin y + \sin x \cos y) \\ &= \cos(x + y) + i \sin(x + y) = e^{i(x+y)},\end{aligned}$$

vilket skulle visas.

(b) Vi söker de $z \in \mathbf{C}$ så att

$$z^{10} = -10 - 10i = 10\sqrt{2}\left(-\frac{1}{\sqrt{2}} - \frac{i}{\sqrt{2}}\right) = 10\sqrt{2}e^{-i3\pi/4},$$

där den sista likheten enklast ses genom att rita en enhetscirkel. Låt nu $z = re^{i\varphi}$, där $r \geq 0$ och $\varphi \in \mathbf{R}$. Då måste

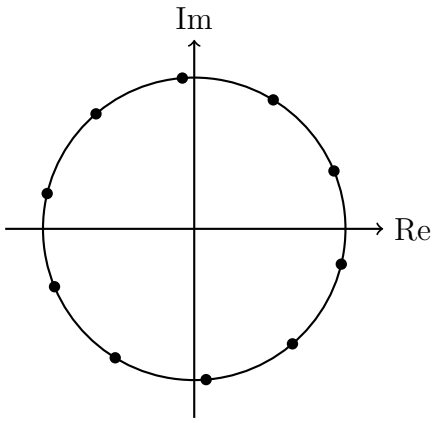
$$z^{10} = r^{10}e^{i10\varphi} = 10\sqrt{2}\, e^{-i3\pi/4} \quad \Leftrightarrow \quad \begin{cases} r^{10} = 10\sqrt{2},\ r \geq 0, \\ 10\varphi = -3\pi/4 + 2\pi n,\ n \in \mathbf{Z}. \end{cases} \tag{1}$$

Detta visar att $r = (10\sqrt{2})^{1/10}$ och $\varphi = -\dfrac{3\pi}{40} + \dfrac{n\pi}{5}$, $n \in \mathbf{Z}$.

Våra lösningar blir nu

$$z = (10\sqrt{2})^{1/10}\, e^{i\left(-\frac{3\pi}{40} + \frac{n\pi}{5}\right)}, \quad n = 0, 1, 2, 3, \ldots, 9.$$

Här har vi valt att endast numrera de lösningar som är unika (när $n = 10$ får vi samma lösning som när $n = 0$ etc). Observera dock att för ekvivalensen i ekvation (1) **måste** vi ha $n \in \mathbf{Z}$ godtycklig.



Svar: (a) se ovan (b) $z = (10\sqrt{2})^{1/10}e^{i\left(-\frac{3\pi}{40} + \frac{n\pi}{5}\right)}$, $n = 0, 1, 2, 3, \ldots, 9$.

6. Vi ser att

$$\alpha = \arcsin\left(-\frac{2}{3}\right) - \arccos\left(\frac{1}{\sqrt{6}}\right) = -\left(\arcsin\left(\frac{2}{3}\right) + \arccos\left(\frac{1}{\sqrt{6}}\right)\right) = -\left(u+v\right),$$

så

$$\cos\alpha = \cos(-(u+v)) = \cos(u+v) = \cos u\cos v - \sin u \sin v,$$

där $u = \arcsin\left(\frac{2}{3}\right)$ och $v = \arccos\left(\frac{1}{\sqrt{6}}\right)$. Notera att $0 < u < \pi/2$ och $0 < v < \pi/2$, så $0 < u + v < \pi$, vilket visar att $-\pi < \alpha < 0$. Vidare gäller att $\cos u > 0$ samt att $\sin u > 0$. Eftersom

$$\cos^2 u = 1 - \sin^2 u = 1 - \left(\frac{2}{3}\right)^2 = \frac{5}{9}$$

och

$$\sin^2 v = 1 - \cos^2 v = 1 - \left(\frac{1}{\sqrt{6}}\right)^2 = \frac{5}{6},$$

så medför detta att

$$\cos u = \frac{\sqrt{5}}{3} \quad \text{och} \quad \sin v = \sqrt{\frac{5}{6}}.$$

Således gäller att

$$\cos\alpha = \frac{\sqrt{5}}{3}\frac{1}{\sqrt{6}} - \frac{2}{3}\frac{\sqrt{5}}{\sqrt{6}} = \frac{\sqrt{5} - 2\sqrt{5}}{3\sqrt{6}} = -\frac{\sqrt{5}}{3\sqrt{6}},$$

så

$$\alpha = \pm\arccos\left(-\frac{\sqrt{5}}{3\sqrt{6}}\right) + 2\pi n$$

för något $n \in \mathbf{Z}$. Eftersom

$$\frac{\pi}{2} < \arccos\left(-\frac{\sqrt{5}}{3\sqrt{6}}\right) < \pi$$

så måste $n = 0$ eftersom $-\pi < \alpha < 0$ och därmed är

$$\alpha = -\arccos\left(-\frac{\sqrt{5}}{3\sqrt{6}}\right).$$

Notera vidare att då $\arccos(-w) = \pi - \arccos(w)$ om $0 < w < \pi/2$, så gäller att

$$\alpha = \arccos\left(\frac{\sqrt{5}}{3\sqrt{6}}\right) - \pi.$$

Svar: $\alpha = \arccos\left(\frac{\sqrt{5}}{3\sqrt{6}}\right) - \pi$.

Alternativt: Man kan också betrakta $\tan\alpha$ vilket leder till att $\tan\alpha = \frac{7}{\sqrt{5}}$ och liknande uppskattningar som ovan ger att $\alpha = \arctan\left(\frac{7}{\sqrt{5}}\right) - \pi$.

7. (a) Summan är varken aritmetisk eller geometrisk och det förefaller inte finnas något elementärt sätt att dela upp den på för att erhålla aritmetiska eller geometriska summor, så vi skriver ut lite termer och undersöker om vi kan se något mönster. Först och främst så observerar vi att

$$\ln\left(1+\frac{1}{k}\right) = \ln\left(\frac{k+1}{k}\right) = \ln(k+1) - \ln k.$$

Summan $\sum_{k=1}^{n} (\ln(k+1) - \ln k)$ kan – om vi stuvar om lite – utvecklas enligt

$$\begin{aligned} &\ln 2 + \ln 3 + \cdots + \ln n + \ln(n+1) \\ &-\big(\ln 1 + \ln 2 + \ln 3 + \cdots + \ln n\big) \\ = /\ \text{teleskopsumma}\ / &= \ln(n+1) - \ln 1 = \ln(n+1). \end{aligned}$$

(b) Vidare vet vi att $\ln x < x - 1$, så med $x = 1 + \frac{1}{k}$ erhåller vi att

$$\ln\left(1+\frac{1}{k}\right) < \frac{1}{k}, \quad k = 1, 2, 3, \ldots,$$

så

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} > \sum_{k=1}^{n} \ln\left(1+\frac{1}{k}\right) = \ln(n+1).$$

Om vi väljer n så att

$$\ln(n+1) > 10^6 \quad \Leftrightarrow \quad n+1 > \exp(10^6) \quad \Leftrightarrow \quad n > \exp(10^6) - 1,$$

så kommer därmed

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} > 10^6.$$

Eftersom termerna i summan är positiva så kommer olikheten ovan att gälla för alla $n > \exp(10^6) - 1$.

Svar: (a) $\ln(n+1)$ (b) $C = \exp(10^6) - 1$ till exempel.