Lösningsförslag matematisk grundkurs 2020-01-09

1. (a) För att vänsterledet ska vara definierat måste vi undvika nolldivisioner, så vi ser direkt att $x \neq 0$ och $x \neq -1$. Vidare så ser vi att

$$1 + \frac{1}{1+\frac{1}{x}} = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \frac{1+\frac{1}{x}+1}{1+\frac{1}{x}} = 0 \quad \Leftrightarrow \quad 1 + \frac{1}{x} + 1 = 0 \quad \Leftrightarrow \quad x = -\frac{1}{2},$$

så $x \neq -\frac{1}{2}$ är nödvändigt. Om $x \neq 0$, $x \neq -1$ och $x \neq -\frac{1}{2}$ så gäller att

$$2 = \frac{1}{1+\frac{1}{1+\frac{1}{x}}} = \frac{1}{1+\frac{x}{x+1}} = \frac{x+1}{2x+1} \quad \Leftrightarrow \quad x+1 = 4x+2 \quad \Leftrightarrow \quad x = -\frac{1}{3}.$$

(b) Kvadratkomplettering visar att

$$2x^2 - 5x + 4 = 2\left(x^2 - \frac{5}{2}x + 2\right) = 2\left(\left(x - \frac{5}{4}\right)^2 - \frac{25}{16} + 2\right) = 2\left(x - \frac{5}{4}\right)^2 + \frac{7}{8}.$$

Således blir uttrycket som minst $\frac{7}{8}$ precis då $x = \frac{5}{4}$.

(c) Vi sätter $z = x + iy$, $x, y \in \mathbf{R}$, och erhåller att

$$x + (2i+1)(x+iy) = 1 - i \quad \Leftrightarrow \quad 2x - 2y + i(2x+y) = 1 - i$$

så $2x - 2y = 1$ och $2x + y = -1$. Från detta erhåller vi att $x = -1/6$ och $y = -2/3$, så $z = -1/6 - 2i/3$.

Svar: (a) $x \neq 0$, $x \neq -1$ och $x \neq -\frac{1}{2}$; $x = -\frac{1}{3}$ (b) $\frac{7}{8}$ då $x = \frac{5}{4}$ (c) $z = -\frac{1+4i}{6}$.

2. För att $f(x)$ ska vara definierad måste vi kräva att $e^x - 3 \neq 0$, så $x \neq \ln 3$. Definitionsmängden blir således

$$D_f = \,]-\infty, \ln 3[\, \cup \,]\ln 3, \infty[\,.$$

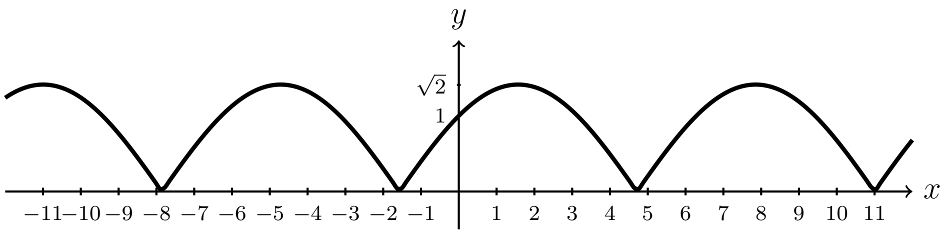
För $x \in D_f$ gäller att

$$y = \frac{e^x+2}{e^x-3} \quad \Leftrightarrow \quad y(e^x - 3) = e^x + 2 \quad \Leftrightarrow \quad e^x(y-1) = 2 + 3y$$
$$\Leftrightarrow \quad e^x = \frac{2+3y}{y-1} \quad \Leftrightarrow \quad x = \ln\left(\frac{3y+2}{y-1}\right),$$

då exp och ln är varandras inverser.

Ett uttryck för inversen ges därmed av $f^{-1}(y) = \ln\left(\frac{3y+2}{y-1}\right)$.

När det gäller $g(x)$ så är $D_g = \mathbf{R}$ eftersom $\sin(x) + 1 \geq 0$ för $x \in \mathbf{R}$. Funktionen är inte inverterbar då till exempel $g(0) = \sqrt{1} = 1 = g(\pi)$.

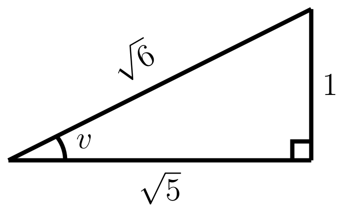


Svar: $D_f =]-\infty, \ln 3[\,\cup\,]\ln 3, \infty[$, $f^{-1}(y) = \ln\left(\dfrac{3y+2}{y-1}\right)$, $D_g = \mathbf{R}$, g^{-1} saknas.

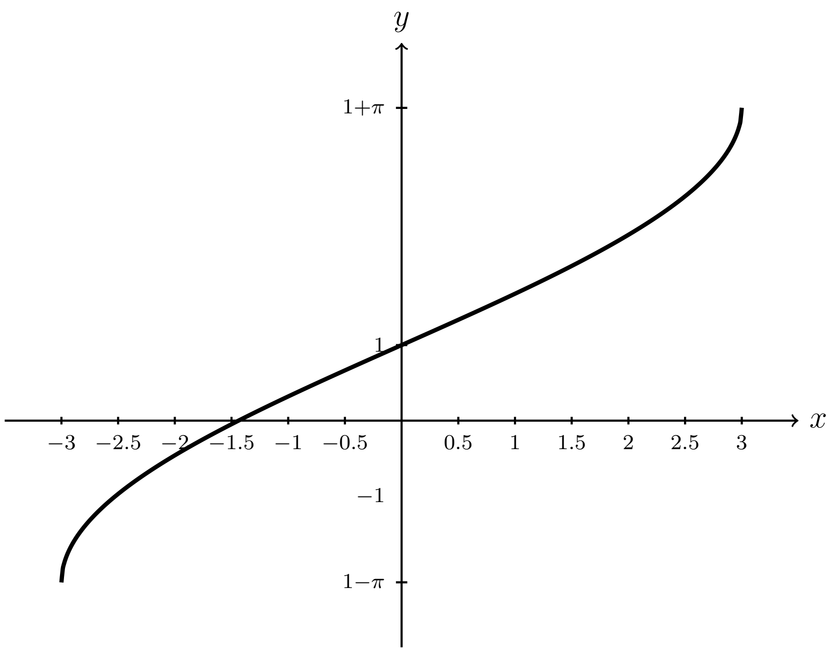
3. (a)

Låt $v = \arctan \dfrac{1}{\sqrt{5}}$. Då gäller att $0 < v < \pi/2$, så vi ser direkt ur en hjälptriangel att

$$\sin v = \frac{1}{\sqrt{6}}.$$



(b) Funktionen har $D_f = [-3, 3]$ och $V_f = [1-\pi, 1+\pi]$. Grafen blir enligt nedan.



(c) Eftersom $e^{\ln t} = t$ för alla $t > 0$, så ser vi att

$$e^x e^y = \exp\left(\ln\left(e^x e^y\right)\right) = \exp\left(\ln e^x + \ln e^y\right) = \exp(x+y) = e^{x+y},$$

då $\ln a + \ln b = \ln(ab)$ för $a, b > 0$.

Svar: (a) $\dfrac{1}{\sqrt{6}}$ (b) se ovan (c) se ovan.

4. En Euler-omskrivning visar att

$$\begin{aligned}
4\sin x\cdot\sin 2x\cdot\cos 4x &= 4\left(\frac{e^{ix}-e^{-ix}}{2i}\right)\left(\frac{e^{i2x}-e^{-i2x}}{2i}\right)\left(\frac{e^{i4x}+e^{-i4x}}{2}\right)\\
&= -\frac{1}{2}\left(e^{i3x}-e^{-ix}-e^{ix}+e^{-i3x}\right)\left(e^{i4x}+e^{-i4x}\right)\\
&= -\frac{1}{2}\left(e^{i7x}+e^{-ix}-e^{i3x}-e^{-i5x}-e^{i5x}-e^{-i3x}+e^{ix}+e^{-i7x}\right)\\
&= -\cos 7x-\cos x+\cos 3x+\cos 5x,
\end{aligned}$$

så ekvationen kan ekvivalent skrivas om enligt

$$\begin{aligned}
4\sin x\cdot\sin 2x\cdot\cos 4x=\cos 3x+\cos 5x \quad &\Leftrightarrow \quad \cos x=-\cos 7x\\
&\Leftrightarrow \quad \cos x=\cos(\pi-7x)\\
&\Leftrightarrow \quad \pm x=\pi-7x+2\pi n,
\end{aligned}$$

där $n\in\mathbf{Z}$. Alltså kommer lösningarna ges av

$$8x=\pi+2\pi n \quad \Leftrightarrow \quad x=\frac{\pi}{8}+\frac{\pi n}{4}$$

eller

$$6x=\pi+2\pi n \quad \Leftrightarrow \quad x=\frac{\pi}{6}+\frac{\pi n}{3}.$$

Svar: $x=\dfrac{\pi}{8}+\dfrac{\pi n}{4}$, $n\in\mathbf{Z}$, eller $x=\dfrac{\pi}{6}+\dfrac{\pi n}{3}$, $n\in\mathbf{Z}$.

5. Notera att

$$\tan\left(\arctan(3\sqrt{3})+\arctan\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)\right)=\frac{3\sqrt{3}+\dfrac{\sqrt{3}}{2}}{1-3\sqrt{3}\cdot\dfrac{\sqrt{3}}{2}}=\frac{7\cdot\dfrac{\sqrt{3}}{2}}{-7/2}=-\sqrt{3}.$$

Då

$$\tan v=-\sqrt{3} \quad \Leftrightarrow \quad v=-\frac{\pi}{3}+n\pi,\ n\in\mathbf{Z},$$

så måste

$$\arctan(3\sqrt{3})+\arctan\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)=-\frac{\pi}{3}+n\pi$$

för något heltal n. Vi uppskattar storleken på ingående arcusfunktioner:

$$0<\arctan\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)<\arctan(3\sqrt{3})<\frac{\pi}{2}.$$

Här har vi använt att arctan är strängt växande samt kända standardvinklar. Alltså:

$$0<\arctan(3\sqrt{3})+\arctan\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)<\pi$$

så det följer nu att $n=1$ är nödvändigt. Sålunda blir

$$\arctan(3\sqrt{3})+\arctan\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)=\frac{2\pi}{3}.$$

Svar: $\arctan(3\sqrt{3}) + \arctan\left(\dfrac{\sqrt{3}}{2}\right) = \dfrac{2\pi}{3}$.

6. Logaritmlagar visar att för $x > 0$ så gäller att

$$\frac{4 + \ln x^4}{2 + \ln \frac{1}{x}} - \frac{6}{\ln(ex^2)} = \frac{4 + 4\ln x}{2 - \ln x} - \frac{6}{1 + 2\ln x}.$$

Om vi låter $t = \ln x$ för $x > 0$ så kan alltså olikheten skrivas om enligt

$$\begin{aligned}\frac{4+4t}{2-t} - \frac{6}{1+2t} \le 1 \quad &\Leftrightarrow \quad \frac{8t^2 + 18t - 8}{(2-t)(2t+1)} \le 1 \quad \Leftrightarrow \quad \frac{10t^2 + 15t - 10}{(2-t)(2t+1)} \le 0 \\ &\Leftrightarrow \quad \frac{5(t+2)(2t-1)}{(2-t)(2t+1)} \le 0 \quad \Leftrightarrow \quad \frac{(t+2)(2t-1)}{(2-t)(2t+1)} \le 0.\end{aligned}$$

Vi gör ett teckenschema för det funna uttrycket.

		-2		$-\frac{1}{2}$		$\frac{1}{2}$		2	
$t+2$	$-$	0	$+$		$+$		$+$		$+$
$2t+1$	$-$		$-$	0	$+$		$+$		$+$
$2t-1$	$-$		$-$		$-$	0	$+$		$+$
$2-t$	$+$		$+$		$+$		$+$	0	$-$
$\dfrac{(t+2)(2t-1)}{(2-t)(2t+1)}$	$-$	0	$+$	☠	$-$	0	$+$	☠	$-$

Vi ser ur tabellen att uttrycket är icke-positivt precis då $t \le -2$, eller $-\dfrac{1}{2} < t \le \dfrac{1}{2}$ eller $t > 2$. Eftersom ln är strängt växande så ges svaret av

$$t = \ln x \le -2 \quad \Leftrightarrow \quad 0 < x \le e^{-2}$$

eller

$$-\frac{1}{2} < t = \ln x \le \frac{1}{2} \quad \Leftrightarrow \quad e^{-1/2} < x \le e^{1/2}$$

eller

$$t = \ln x > 2 \quad \Leftrightarrow \quad x > e^2.$$

Svar: $0 < x \le e^{-2}$ eller $e^{-1/2} < x \le e^{1/2}$ eller $x > e^2$.

7. Vi formulerar om vänsterledet en aning och utnyttjar binomialsatsen för att erhålla

$$\begin{aligned}\cos^6 x \sum_{k=0}^{6} i^k \binom{6}{k} \tan^k x &= \cos^6 x \sum_{k=0}^{6} \binom{6}{k} (i\tan x)^k\, 1^{6-k} = \cos^6 x(1 + i\tan x)^6 \\ &= (\cos x + i\sin x)^6 = e^{i6x}.\end{aligned}$$

Således måste $e^{i6x} = a(1+i)$. Om denna likhet ska gälla så måste vänster- och högerled ha samma belopp, så

$$|e^{i6x}| = |a(1+i)| \quad \Leftrightarrow \quad 1 = |a||1+i| = |a|\sqrt{2} \quad \Leftrightarrow \quad a = \pm\frac{1}{\sqrt{2}}.$$

För $a = \dfrac{1}{\sqrt{2}}$ så blir (rita en enhetscirkel!)

$$\begin{aligned} e^{i6x} = \frac{1}{\sqrt{2}}(1+i) = e^{i\pi/4} \quad &\Leftrightarrow \quad 6x = \frac{\pi}{4} + 2\pi n,\ n \in \mathbf{Z}, \\ &\Leftrightarrow \quad x = \frac{\pi}{24} + \frac{\pi n}{3}, \end{aligned}$$

och för $a = -\dfrac{1}{\sqrt{2}}$ så blir

$$\begin{aligned} e^{i6x} = -\frac{1}{\sqrt{2}}(1+i) = e^{i5\pi/4} \quad &\Leftrightarrow \quad 6x = \frac{5\pi}{4} + 2\pi n,\ n \in \mathbf{Z}, \\ &\Leftrightarrow \quad x = \frac{5\pi}{24} + \frac{\pi n}{3}. \end{aligned}$$

Svar:
$a \neq \pm\dfrac{1}{\sqrt{2}}$: ekvationen saknar lösningar.
$a = \dfrac{1}{\sqrt{2}}$: $x = \dfrac{\pi}{24} + \dfrac{\pi n}{3}$, $n \in \mathbf{Z}$,
$a = -\dfrac{1}{\sqrt{2}}$: $x = \dfrac{5\pi}{24} + \dfrac{\pi n}{3}$, $n \in \mathbf{Z}$.