Lösningsförslag matematisk grundkurs 2020-08-18

1. (a) För att uttrycket i högerledet ska vara definierat måste vi undvika nolldivisioner, så vi ser direkt att $y \neq \pm 4$ är nödvändigt. Om $y \neq \pm 4$ så ser vi att

$$0 = 1 - \frac{16 - 8y + y^2}{16 - y^2} = 1 - \frac{(4-y)^2}{(4-y)(4+y)} = 1 - \frac{4-y}{4+y}$$
$$\Leftrightarrow \quad 4 - y = 4 + y \quad \Leftrightarrow \quad y = 0,$$

så $y \neq 0$ är nödvändigt.

(b) Beloppet definieras enligt

$$|1-2x| = \begin{cases} 1 - 2x, & 2x \leq 1, \\ -(1-2x) = 2x - 1, & 2x \geq 1. \end{cases}$$

Vi delar upp i två olika fall.

Fall 1: $x \leq \frac{1}{2}$. Då är

$$x - |1-2x| = \frac{1}{4} \quad \Leftrightarrow \quad x - (1-2x) = \frac{1}{4} \quad \Leftrightarrow \quad 3x = \frac{5}{4} \quad \Leftrightarrow \quad x = \frac{5}{12},$$

vilket uppfyller att $x \leq 1/2$, så detta är en lösning.

Fall 2: $x \geq \frac{1}{2}$. Då är

$$x - |1-2x| = \frac{1}{4} \quad \Leftrightarrow \quad x - (2x-1) = \frac{1}{4} \quad \Leftrightarrow \quad x = \frac{3}{4},$$

vilket ligger i rätt intervall. Alltså är även detta en lösning.

(c) En polynomdivision visar att

$$x^3 + x^2 + 3 = (x^2 - x + 2)(x+2) - 1,$$

så $k(x) = x^2 - x + 2$ och $r = -1$.

Svar: (a) $y \neq \pm 4$, $y \neq 0$ (b) $x = \frac{5}{12}$ eller $x = \frac{3}{4}$ (c) $k(x) = x^2 - x + 2$ och $r = -1$.

2. Vi skriver om ekvationen för att se om vi kan finna en lämplig variabel:

$$2 \cdot 9^x \cdot 3^x - 9^{x+1} + 12 = 20 \cdot 3^x \quad \Leftrightarrow \quad 2 \cdot (3^x)^3 - 9 \cdot (3^x)^2 + 12 = 20 \cdot 3^x$$
$$\Leftrightarrow \quad 2t^3 - 9t^2 - 20t + 12 = 0,$$

där $t = 3^x$. Vi kan gissa en rot och ser att $t = -2$ är ett nollställe till polynomet i det sista vänsterledet. Detta kan inte ge en lösning till ursprungsekvationen då $t > 0$ är nödvändigt, men vi kan utföra en polynomdivision med faktorn $t + 2$ för att erhålla

$$2t^3 - 9t^2 - 20t + 12 = (t+2)(2t^2 - 13t + 6) = 2(t+2)\left(\left(t - \frac{13}{4}\right)^2 - \frac{121}{16}\right)$$
$$= 2(t+2)(t-6)\left(t - \frac{1}{2}\right).$$

Här ser vi att $t=-2$ inte går (då $3^x=-2$ saknar lösning) och att

$$t=6 \quad \Leftrightarrow \quad 3^x=6 \quad \Leftrightarrow \quad x=\frac{\ln 6}{\ln 3}=1+\frac{\ln 2}{\ln 3}$$

samt

$$t=\frac{1}{2} \quad \Leftrightarrow \quad 3^x=\frac{1}{2} \quad \Leftrightarrow \quad x=\frac{\ln \frac{1}{2}}{\ln 3}=-\frac{\ln 2}{\ln 3}.$$

Svar: $x=1+\dfrac{\ln 2}{\ln 3}$ eller $x=-\dfrac{\ln 2}{\ln 3}$.

3. (a) Vi ser att

$$\cos 2x=3+5\sin x \quad \Leftrightarrow \quad 1-2\sin^2 x=3+5\sin x,$$

så vi låter $t=\sin x$ och betraktar

$$1-2t^2=3+5t \quad \Leftrightarrow \quad 2t^2+5t+2=0 \quad \Leftrightarrow \quad t=-\frac{5}{4}\pm\frac{3}{4}.$$

Eftersom $t\in[-1,1]$ så kan inte $t=-2$ ge en lösning men

$$t=-\frac{1}{2} \quad \Leftrightarrow \quad x=-\frac{\pi}{6}+2\pi n \text{ eller } x=\frac{7\pi}{6}+2\pi n$$

för $n\in\mathbf{Z}$.

(b) Eftersom

$$\cos v=\frac{1}{4} \quad \Leftrightarrow \quad v=\pm\arccos\left(\frac{1}{4}\right)+2\pi n,\ n\in\mathbf{Z},$$

och $0<\arccos(1/4)<\pi/2$, så ges den enda lösningen i intervallet $]-\pi,0[$ av

$$v=-\arccos\left(\frac{1}{4}\right).$$

Svar: (a) $x=-\dfrac{\pi}{6}+2\pi n$, $n\in\mathbf{Z}$, eller $x=\dfrac{7\pi}{6}+2\pi n$, $n\in\mathbf{Z}$ (b) $v=-\arccos\left(\dfrac{1}{4}\right)$.

4. (a) Vi har

$$|\ln(3-x)|=1 \quad \Leftrightarrow \quad \ln(3-x)=\pm 1 \quad \Leftrightarrow \quad 3-x=e^{\pm 1} \quad \Leftrightarrow \quad x=3-e^{\pm 1}.$$

(b) För att alla logaritmer ska vara definierade så måste $x<4$, $x>0$, samt $x>-1$. Således antar vi att $0<x<4$. Då gäller att

$$\begin{aligned}\ln(4-x)-2\ln x+\ln(x+1)=0 \quad &\Leftrightarrow \quad \ln\left(\frac{(4-x)(x+1)}{x^2}\right)=0\\ &\Leftrightarrow \quad \frac{(4-x)(x+1)}{x^2}=1 \quad \Leftrightarrow \quad 2x^2-3x-4=0.\end{aligned}$$

Vi löser denna ekvation och finner att

$$x=\frac{3\pm\sqrt{41}}{4}$$

är de enda möjligheterna. Eftersom $0<x<4$ är det endast $x=3/4+\sqrt{41}/4$ som är en lösning (ty $6<\sqrt{41}<7$).

Svar: (a) $x=3-e^{\pm 1}$ (b) $x=\dfrac{3+\sqrt{41}}{4}$.

5. Den geometriska summan har 20 termer och kan därmed skrivas

$$s = a + aq + aq^2 + \cdots + aq^{19}$$

där a och q är konstanter. Den andra termen uppfyller att $aq = 2$ samt vi vet att summan av den 3:e och 4:e blir 144, så $aq^2 + aq^3 = 144$. Vi löser detta ekvationssystem. Notera att

$$144 = aq^2 + aq^3 = aq(q + q^2) = 2(q + q^2) \quad \Leftrightarrow \quad q^2 + q - 72 = 0 \quad \Leftrightarrow \quad q = -\frac{1}{2} \pm \frac{17}{2},$$

så $q = -9$ eller $q = 8$. Om $q = -9$ blir $a = -2/9$ och om $q = 8$ blir $a = 1/4$. De två summor som hör ihop med dessa val kan vi beräkna enligt

$$s = -\frac{2}{9} \cdot \frac{(-9)^{20} - 1}{-9 - 1} = \frac{9^{20} - 1}{5 \cdot 9} = \frac{9^{20} - 1}{45}$$

respektive

$$s = \frac{1}{4} \cdot \frac{8^{20} - 1}{8 - 1} = \frac{8^{20} - 1}{28}.$$

Svar: $\dfrac{9^{20} - 1}{45}$ eller $\dfrac{8^{20} - 1}{28}$.

6. Vi kvadratkompletterar vänsterledet och ser att

$$\begin{aligned} z^{16} + (4 - i)z^8 + 3 - 3i &= \left(z^8 + 2 - \frac{i}{2}\right)^2 - \left(2 - \frac{i}{2}\right)^2 + 3 - 3i \\ &= \left(z^8 + 2 - \frac{i}{2}\right)^2 - 4 + 2i + \frac{1}{4} + 3 - 3i \\ &= \left(z^8 + 2 - \frac{i}{2}\right)^2 - \frac{3}{4} - i. \end{aligned}$$

Låt nu $w = z^8 + 2 - i/2$. Vi söker de $w \in \mathbf{C}$ så att

$$w^2 = \frac{3}{4} + i. \tag{1}$$

Låt $w = x + iy$, $x, y \in \mathbf{R}$. Då gäller att

$$x^2 + 2ixy - y^2 = \frac{3}{4} + i \quad \Leftrightarrow \quad \begin{cases} x^2 - y^2 = 3/4, \\ xy = 1/2. \end{cases}$$

Vidare följer det av (1) att

$$x^2 + y^2 = |w|^2 = |w^2| = \left|\frac{3}{4} + i\right| = \sqrt{\frac{9}{16} + 1} = \frac{5}{4}.$$

Härur kan vi till exempel se att

$$(x^2 - y^2) + (x^2 + y^2) = \frac{3}{4} + \frac{5}{4} \quad \Leftrightarrow \quad 2x^2 = 2 \quad \Leftrightarrow \quad x = \pm 1.$$

Eftersom $y = 1/(2x)$ så erhåller vi lösningarna $w = 1 + i/2$ och $w = -1 - i/2$. Vi betraktar nu två fall.

Fall 1. Om $w = 1 + i/2$ behöver vi lösa

$$1 + i/2 = z^8 + 2 - i/2 \quad \Leftrightarrow \quad z^8 = -1 + i = \sqrt{2}e^{i3\pi/4},$$

där den sista likheten enklast ses genom att rita en enhetscirkel. Låt nu $z = re^{i\varphi}$, där $r \geq 0$ och $\varphi \in \mathbf{R}$. Då måste

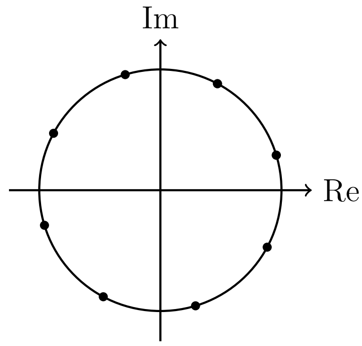
$$z^8 = r^8 e^{i8\varphi} = \sqrt{2}\, e^{i3\pi/4} \quad \Leftrightarrow \quad \begin{cases} r^8 = \sqrt{2},\ r \geq 0, \\ 8\varphi = 3\pi/4 + 2\pi n,\ n \in \mathbf{Z}. \end{cases} \tag{2}$$

Detta visar att $r = (\sqrt{2})^{1/8} = 2^{1/16}$ och $\varphi = \dfrac{3\pi}{32} + \dfrac{n\pi}{4}$, $n \in \mathbf{Z}$.

Våra lösningar blir nu

$$z = 2^{1/16}\, e^{i\left(\frac{3\pi}{32} + \frac{n\pi}{4}\right)}, \quad n = 0, 1, 2, 3, \ldots, 7.$$

Här har vi valt att endast numrera de lösningar som är unika (när $n = 8$ får vi samma lösning som när $n = 0$ etc). Observera dock att för ekvivalensen i ekvation (2) **måste** vi ha $n \in \mathbf{Z}$ godtycklig.



Fall 2. Om $w = -1 - i/2$ behöver vi lösa

$$-1 - i/2 = z^8 + 2 - i/2 \quad \Leftrightarrow \quad z^8 = -3 = 3e^{i\pi}.$$

Analogt med fall 1, låt nu $z = re^{i\varphi}$, där $r \geq 0$ och $\varphi \in \mathbf{R}$. Då måste

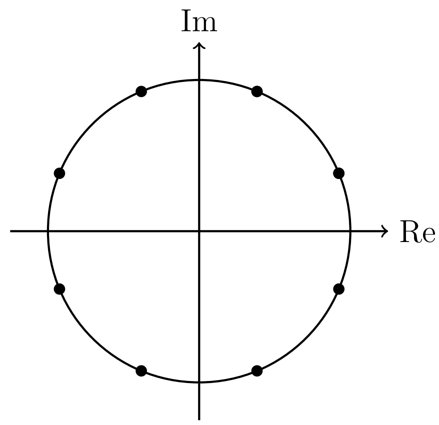
$$z^8 = r^8 e^{i8\varphi} = 3\, e^{i\pi} \quad \Leftrightarrow \quad \begin{cases} r^8 = 3,\ r \geq 0, \\ 8\varphi = \pi + 2\pi n,\ n \in \mathbf{Z}, \end{cases} \tag{3}$$

så $r = 3^{1/8}$ och $\varphi = \dfrac{\pi}{8} + \dfrac{n\pi}{4}$, $n \in \mathbf{Z}$.

Våra lösningar i detta fall ges av

$$z = 3^{1/8}\, e^{i\left(\frac{\pi}{8} + \frac{n\pi}{4}\right)}, \quad n = 0, 1, 2, 3, \ldots, 7.$$

Här har vi åter igen valt att endast numrera de lösningar som är unika Observera dock att vi fortfarande **måste** ha $n \in \mathbf{Z}$ godtycklig för att ekvivalensen i ekvation (3) ska gälla.



Svar: $z = 2^{1/16}\, e^{i\left(\frac{3\pi}{32} + \frac{n\pi}{4}\right)}$, $n = 0, 1, 2, 3, \ldots, 7$, samt $z = 3^{1/8}\, e^{i\left(\frac{\pi}{8} + \frac{n\pi}{4}\right)}$, $n = 0, 1, 2, 3, \ldots, 7$.

7. Låt $-1 \leq x \leq 0$. Då gäller att

$$y = g_1(x) = \sqrt{f(x^2)} \quad \Rightarrow \quad y^2 = f(x^2) \quad \Leftrightarrow \quad f^{-1}(y^2) = x^2 \quad \Leftrightarrow \quad x = \pm\sqrt{f^{-1}(y^2)}$$

där endast $x = -\sqrt{f^{-1}(y^2)}$ är möjligt (ty $x \leq 0$). Alltså är $g_1^{-1}(y) = -\sqrt{f^{-1}(y^2)}$ ett uttryck för inversen då vi endast hittar ett alternativ.

Låt $0 \leq x \leq 1$. Då är

$$y = g_2(x) = f(x)^2 \quad \Leftrightarrow \quad \pm\sqrt{y} = f(x) \quad \Leftrightarrow \quad x = f^{-1}(\pm\sqrt{y})$$

och endast $x = f^{-1}(\sqrt{y})$ är möjlig då $V_f = [0, 1]$ så $f(x) = \sqrt{y}$ är den enda möjligheten. Alltså är $g_2^{-1}(y) = f^{-1}(\sqrt{y})$ ett uttryck för inversen.

Låt $-1 \leq x \leq 1$. Vi ser att

$$y = g_3(x) = \tan(6 + f(\arctan x)) \quad \Leftrightarrow \quad \arctan(y) + n\pi = 6 + f(\arctan(x))$$

där $n \in \mathbf{Z}$. Vilka n är möjliga? Eftersom $\arctan y \in]-\pi/2, \pi/2[$ och $f(\arctan(x)) \in [0, 1]$ så är $n = 2$ enda möjligheten. Eftersom vi startar med ett påstående som är sant (nämligen att $y = g_3(x)$) så innebär det att

$$\arctan(y) + 2\pi = 6 + f(\arctan(x))$$

måste vara sant. Alltså blir

$$\arctan(x) = f^{-1}(\arctan(y) + 2\pi - 6) \quad \Rightarrow \quad x = \tan(f^{-1}(\arctan(y) + 2\pi - 6))$$

så åter igen eftersom vi startar med ett sant påstående och endast hittar ett möjligt uttryck för inversen så är detta ett uttryck för inversen:

$$g_3^{-1}(y) = \tan(f^{-1}(\arctan(y) + 2\pi - 6)).$$

Svar:
$g_1^{-1}(y) = -\sqrt{f^{-1}(y^2)}$,
$g_2^{-1}(y) = f^{-1}(\sqrt{y})$ samt
$g_3^{-1}(y) = \tan(f^{-1}(\arctan(y) + 2\pi - 6))$.