Lösningsförslag TATB01 2019-09-05 14-17

1. Låt oss stuva om i ekvationen för att sedan kvadrera båda leden (observera att det då bara blir en implikation!):

$$\begin{aligned}
\sqrt{x+2}+x=10 \quad &\Leftrightarrow \quad \sqrt{x+2}=10-x \\
&\Rightarrow \quad x+2=(10-x)^2=100-2x+x^2 \\
&\Leftrightarrow \quad x^2-21x+98=0 \\
&\Leftrightarrow \quad x=\frac{21}{2}\pm\sqrt{\frac{441}{4}-\frac{392}{4}}=\frac{21}{2}\pm\frac{7}{2} \\
&\Leftrightarrow \quad x=7 \quad \text{eller} \quad x=14.
\end{aligned}$$

Eftersom vi har en implikation **måste** svaren testas. Om $x=14$ ser vi att

$$\text{VL}=\sqrt{16}+14=4+14=18\neq 10=\text{HL},$$

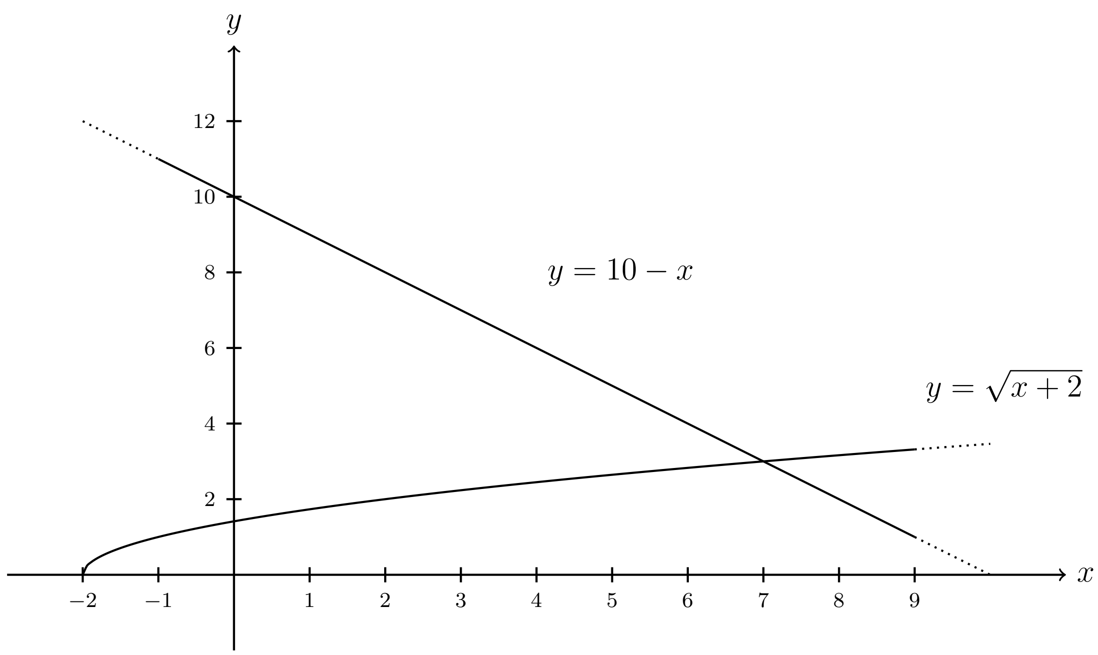
så $x=14$ är *inte* en lösning. Om $x=7$ är

$$\text{VL}=\sqrt{9}+7=3+7=10=\text{HL}.$$

Eftersom vänsterled och högerled stämmer överens så är $x=7$ en lösning.

Svar: $x=7$.

Vi kan även skissa $\sqrt{x+2}$ och $10-x$ för att få en uppfattning om var lösningen finns.



2. Först skriver vi om olikheten för att få något som är enklare att studera:

$$\begin{aligned}
\frac{x^2-2x+10}{x-1}>3x \quad &\Leftrightarrow \quad \frac{x^2-2x+10-3x(x-1)}{x-1}>0 \\
&\Leftrightarrow \quad \frac{-2x^2+x+10}{x-1}>0.
\end{aligned}$$

Vi ser vidare att

$$
\begin{aligned}
-2x^2 + x + 10 = -2\left(x^2 - \frac{x}{2} - 5\right) &= -2\left(\left(x - \frac{1}{4}\right)^2 - \frac{81}{16}\right) \\
&= -2\left(x - \frac{5}{2}\right)(x+2) = (5-2x)(x+2),
\end{aligned}
$$

så vi ska undersöka när

$$\frac{(5-2x)(x+2)}{x-1} > 0.$$

Vi gör ett teckenschema för det funna uttrycket.

		-2		1		$5/2$	
$x+2$	$-$	0	$+$		$+$		$+$
$x-1$	$-$		$-$	0	$+$		$+$
$5-2x$	$+$		$+$		$+$	0	$-$
$\dfrac{(5-2x)(x+2)}{x-1}$	$+$	0	$-$	☠	$+$	0	$-$

Vi ser ur tabellen att uttrycket är positivt precis då $x < -2$ eller $1 < x < 5/2$.

Svar: $x < -2$ eller $1 < x < 5/2$.

3. (a) Vi ser att summan är geometrisk med 68 termer, kvoten $-2/3$ och första term $5/2$, så

$$\frac{5}{2}\left(1 - \frac{2}{3} + \frac{4}{3^2} - \cdots - \frac{2^{67}}{3^{67}}\right) = \frac{5}{2} \cdot \frac{1 - \left(-\frac{2}{3}\right)^{68}}{1 + \frac{2}{3}} = \frac{3}{2} \cdot \left(1 - \left(\frac{2}{3}\right)^{68}\right).$$

(b)

$$
\begin{aligned}
\operatorname{Im}\left(\frac{i}{i-3} + \frac{i-3}{i}\right) &= \operatorname{Im}\left(\frac{i(-i-3)}{|i-3|^2} - i(i-3)\right) \\
&= \operatorname{Im}\left(\frac{1}{10}(1-3i) + 1 + 3i\right) = \frac{-3}{10} + 3 = \frac{27}{10}.
\end{aligned}
$$

(c) Vi kvadratkompletterar ekvationen och finner att

$$
\begin{aligned}
x^2 + y^2 = 3 + x - 3y \quad &\Leftrightarrow \quad \left(x - \frac{1}{2}\right)^2 - \frac{1}{4} + \left(y + \frac{3}{2}\right)^2 - \frac{9}{4} = 3 \\
&\Leftrightarrow \quad \left(x - \frac{1}{2}\right)^2 + \left(y + \frac{3}{2}\right)^2 = \frac{22}{4}.
\end{aligned}
$$

Medelpunkt är alltså $(1/2,\ -3/2)$ och radien $\sqrt{22}/2$.

Svar: (a) $\dfrac{3}{2} - \left(\dfrac{2}{3}\right)^{67}$ (b) $\dfrac{27}{10}$ (c) $\left(\dfrac{1}{2},\ -\dfrac{3}{2}\right)$; $\dfrac{\sqrt{22}}{2}$.

4. Vi kvadratkompletterar för att få en enklare ekvation:

$$z^2 - z + 4iz = \frac{9}{2} + i \quad \Leftrightarrow \quad \left(z - \frac{1}{2} + 2i\right)^2 = \left(-\frac{1}{2} + 2i\right)^2 + \frac{9}{2} + i = \frac{3}{4} - i.$$

Låt $w = z - \dfrac{1}{2} + 2i$ och skriv $w = x + yi$ där $x, y \in \mathbf{R}$. Vi söker de $w \in \mathbf{C}$ så att

$$w^2 = \frac{3}{4} - i. \tag{1}$$

Då gäller att

$$x^2 + 2ixy - y^2 = \frac{3}{4} - i \quad \Leftrightarrow \quad \begin{cases} x^2 - y^2 = 3/4, \\ \qquad xy = -1/2. \end{cases}$$

Vidare följer det av (1) att

$$x^2 + y^2 = |w|^2 = |w^2| = \left| \frac{3}{4} - i \right| = \sqrt{\frac{9}{16} + 1} = \frac{5}{4}.$$

Härur kan vi till exempel se att

$$(x^2 - y^2) + (x^2 + y^2) = \frac{3}{4} + \frac{5}{4} \quad \Leftrightarrow \quad 2x^2 = 2 \quad \Leftrightarrow \quad x = \pm 1.$$

Eftersom $y = -1/(2x)$ så erhåller vi lösningarna

$$w = 1 - i/2 \quad \Leftrightarrow \quad z = \frac{3}{2} - \frac{5i}{2}$$

och

$$w = -1 + i/2 \quad \Leftrightarrow \quad z = -\frac{1}{2} - \frac{3i}{2}.$$

Svar: $\dfrac{3}{2} - \dfrac{5i}{2}$ eller $-\dfrac{1}{2} - \dfrac{3i}{2}$.

5. Vi söker lösningar som är heltal $n \in \{2, 3, 4, \ldots\}$ för att binomialkoefficienten ska vara definierad. Då gäller att

$$\binom{n}{n-2} = a \cdot n^2 \quad \Leftrightarrow \quad \frac{n(n-1)}{2} = a \cdot n^2 \quad \Leftrightarrow \quad n^2 - n = 2an^2$$
$$\Leftrightarrow \quad n(1 - 2a) = 1.$$

Om $a = 1/2$ så står det $0 = 1$, så då saknas det lösningar till ursprungsekvationen. Om $a \neq 1/2$ så är således

$$n = \frac{1}{1 - 2a}.$$

Nu måste n vara ett heltal $l \geq 2$, så

$$l = \frac{1}{1 - 2a} \quad \Leftrightarrow \quad 1 - 2a = \frac{1}{l} \quad \Leftrightarrow \quad a = \frac{1}{2}\left(1 - \frac{1}{l}\right)$$

för $l = 2, 3, 4, \ldots$ Vi ser att $a \neq 1/2$ om $l \geq 2$.

Svar: $n = \dfrac{1}{1 - 2a}$ om $a = \dfrac{1}{2}\left(1 - \dfrac{1}{l}\right)$, $l = 2, 3, 4, \ldots$. För andra a saknas lösning.