Lösningsförslag TATB01 2020-09-05 8-11

1. Beloppen definieras enligt

$$|3x+1| = \begin{cases} 3x+1, & x \geq -1/3, \\ -3x-1, & x \leq -1/3, \end{cases} \qquad \text{och} \qquad |x-3| = \begin{cases} x-3, & x \geq 3, \\ 3-x, & x \leq 3. \end{cases}$$

Intressanta punkter för de olika beloppen som ingår i ekvationen är $x = -1/3$ och $x = 3$. Vi delar upp i tre olika fall.

Fall 1: $x \leq -1/3$. Då är

$$|3x+1| - |x-3| = x \quad \Leftrightarrow \quad -(3x+1)-(3-x) = x \quad \Leftrightarrow \quad -4 = 3x \quad \Leftrightarrow \quad x = -\frac{4}{3},$$

vilket uppfyller att $x \leq -1/3$. Detta är alltså en lösning.

Fall 2: $-1/3 \leq x \leq 3$. Då är

$$|3x+1| - |x-3| = x \quad \Leftrightarrow \quad 3x+1-(3-x) = x \quad \Leftrightarrow \quad 3x = 2 \quad \Leftrightarrow \quad x = \frac{2}{3},$$

vilket ligger i rätt intervall. Alltså är $x = \dfrac{2}{3}$ en lösning.

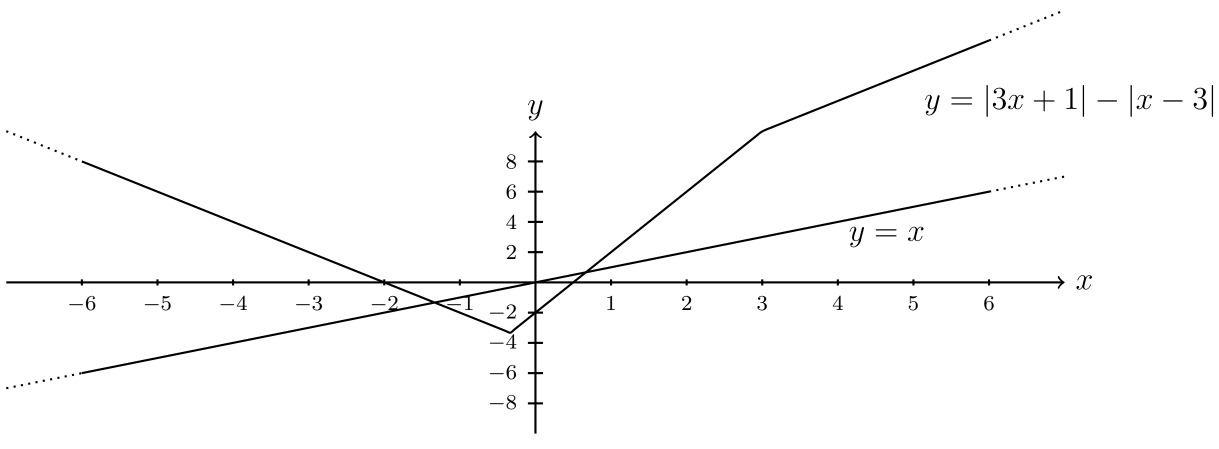
Fall 3: $x \geq 3$. Då är

$$|3x+1| - |x-3| = x \quad \Leftrightarrow \quad 3x+1-(x-3) = x \quad \Leftrightarrow \quad x = -4,$$

vilket *inte* ligger i rätt intervall.

Svar: $x = -\dfrac{4}{3}$ och $x = \dfrac{2}{3}$.

Man kan även skissa vänster- och högerled i en graf för att se om svaret verkar rimligt.



2. (a) Vi kan skriva den aritmetiska summan enligt

$$-8-5-\cdots+229 = \sum_{k=0}^{m}(-8+3k)$$

för något heltal m. Vi ser att

$$229 = -8+3m \quad \Leftrightarrow \quad 3m = 237 \quad \Leftrightarrow \quad m = 79,$$

så summan har 80 termer. Alltså blir

$$\sum_{k=0}^{m}(-8+3k) = \frac{-8+229}{2}\cdot 80 = 221\cdot 40 = 8840.$$

(b)

$$\left|\frac{1}{2+i}+i\right| = \left|\frac{1+i(2+i)}{2+i}\right| = \left|\frac{2i}{2+i}\right| = \frac{|2i|}{|2+i|} = \frac{2}{\sqrt{5}}.$$

(c) Vi kvadratkompletterar uttrycket och finner att

$$p(x) = 4x^2-4x+2 = 4\left(x^2-x+\frac{1}{2}\right) = 4\left(\left(x-\frac{1}{2}\right)^2-\frac{1}{4}+\frac{1}{2}\right) = 4\left(x-\frac{1}{2}\right)^2+1$$

så minimum inträffar då $x = 1/2$ och $p(1/2) = 1$.

Svar: (a) 8840 (b) $\dfrac{2}{\sqrt{5}}$ (c) Minsta värdet är 1.

3. Först skriver vi om olikheten för att få något som är enklare att studera:

$$\frac{x-5}{2-x}+\frac{2x+15}{2x+1}\le 5 \quad\Leftrightarrow\quad \frac{(x-5)(2x+1)+(2x+15)(2-x)-5(2-x)(2x+1)}{(2-x)(2x+1)}\le 0$$
$$\Leftrightarrow\quad \frac{10x^2-35x+15}{(2-x)(2x+1)}\le 0 \quad\Leftrightarrow\quad \frac{(2x-1)(x-3)}{(2-x)(2x+1)}\le 0,$$

där vi faktoriserade täljaren enligt

$$10x^2-35x+15 = 10\left(x^2-\frac{7}{2}x+\frac{3}{2}\right) = 10\left(\left(x-\frac{7}{4}\right)^2-\frac{49}{16}+\frac{3}{2}\right)$$
$$= 10\left(x-\frac{7}{4}-\frac{5}{4}\right)\left(x-\frac{7}{4}+\frac{5}{4}\right) = 5\,(x-3)\,(2x-1)\,.$$

Vi gör ett teckenschema för det funna bråket ovan.

		$-\frac{1}{2}$		$\frac{1}{2}$		2		3	
$2x+1$	$-$	0	$+$		$+$		$+$		$+$
$2x-1$	$-$		$-$	0	$+$		$+$		$+$
$2-x$	$+$		$+$		$+$	0	$-$		$-$
$x-3$	$-$		$-$		$-$		$-$	0	$+$
$\dfrac{(2x-1)(x-3)}{(2-x)(2x+1)}$	$-$	☠	$+$	0	$-$	☠	$+$	0	$-$

Vi ser ur tabellen att uttrycket är icke-positivt precis då $x < -\dfrac{1}{2}$ eller $\dfrac{1}{2} \le x < 2$ eller $x \ge 3$.

Svar: $x < -\dfrac{1}{2}$ eller $\dfrac{1}{2} \le x < 2$ eller $x \ge 3$.

4. (a) Polynomet måste innehålla faktorerna $z+1$ och $z-(1+i)$. Om polynomet dessutom ska ha reella koefficienter så måste även $z-(1-i)$ vara en faktor (detta då icke-reella rötter alltid förekommer i komplexkonjugerade par om polynomet har reella koefficienter). Alltså ges ett polynom med de sökta egenskaperna av

$$p(z) = (z+1)(z-(1+i))(z-(1-i)) = (z+1)(z^2-2z+2) = z^3 - z^2 + 2.$$

(b) Linjens ekvation kan skrivas $y = kx + m$ för konstanter k och m. Om linjen ska gå genom $(-1,-1)$ och $(1,3)$ så måste

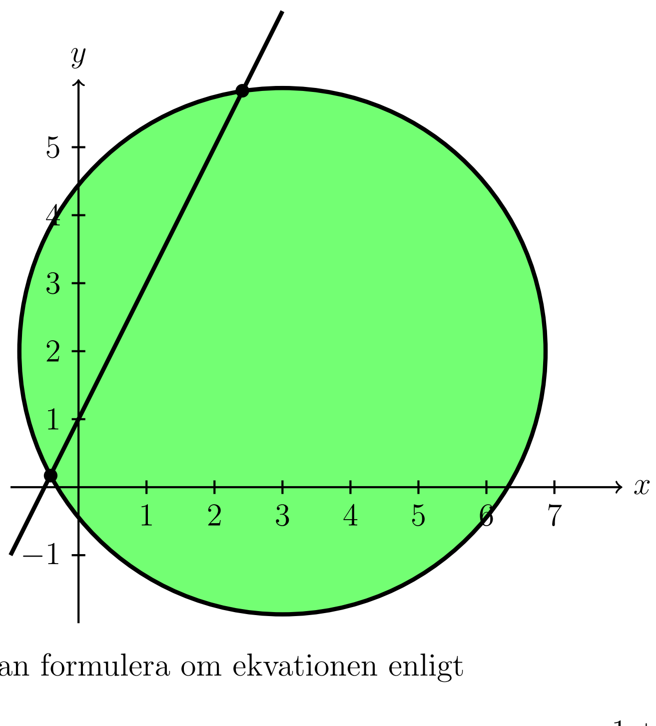
$$\begin{cases} -1 = k \cdot (-1) + m, \\ \ \ 3 = k \cdot 1 + m. \end{cases}$$

Genom att addera dessa två ekvationer ser vi att $-1+3 = 2m$, så $m = 1$, vilket i sin tur ger att $k = 2$. Linjens ekvation är således $y = 2x+1$. Cirkelns ekvation ges av

$$(x-3)^2 + (y-2)^2 = 15$$

och vid skärningspunkter mellan linje och cirkel måste båda ekvationer vara uppfyllda, så

$$\begin{aligned} (x-3)^2 + (2x-1)^2 = 15 \quad &\Leftrightarrow \quad x^2 - 6x + 9 + 4x^2 - 4x + 1 = 15 \\ &\Leftrightarrow \quad 5x^2 - 10x - 5 = 0 \quad \Leftrightarrow \quad x^2 - 2x - 1 = 0 \\ &\Leftrightarrow \quad (x-1)^2 - 2 = 0 \quad \Leftrightarrow \quad x = 1 \pm \sqrt{2}. \end{aligned}$$



Svar: $\left(1+\sqrt{2},\ 3+2\sqrt{2}\right)$ och $\left(1-\sqrt{2},\ 3-2\sqrt{2}\right)$.

5. Vi kan formulera om ekvationen enligt

$$\frac{a}{ax+2} + ax = 0 \quad \Leftrightarrow \quad a \cdot \frac{1+ax^2+2x}{ax+2} = 0.$$

För att en lösning ska kunna existera så måste $ax+2 \neq 0$. Om detta är sant så har vi två alternativ:

$$a = 0 \qquad \text{eller} \qquad 1 + ax^2 + 2x = 0.$$

Om $a = 0$ så löser alla $x \in \mathbf{R}$ ekvationen (det är tydligt att $ax + 2 = 2 \neq 0$). Antag nu att $a \neq 0$. Då gäller att

$$1 + ax^2 + 2x = 0 \quad \Leftrightarrow \quad x^2 + \frac{2x}{a} + \frac{1}{a} = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \left(x + \frac{1}{a}\right)^2 = \frac{1}{a^2} - \frac{1}{a}.$$

Om $a > 1$ så saknas reella lösningar. Om $a \leq 1$ så ser vi att

$$x = -\frac{1}{a} \pm \sqrt{\frac{1}{a^2} - \frac{1}{a}} = -\frac{1}{a} \pm \frac{1}{|a|}\sqrt{1-a}.$$

Vi kan också kontrollera att

$$ax + 2 = -1 \pm \frac{a}{|a|}\sqrt{1-a} = 0 \quad \Rightarrow \quad 1 = 1 - a \quad \Leftrightarrow \quad a = 0,$$

vilket vi antagit inte är sant i detta fall.

Svar: Om $a = 0$ löser alla $x \in \mathbf{R}$ ekvationen. Om $a \neq 0$ och $a \leq 1$ så ges lösningarna av $x = -\frac{1}{a} \pm \frac{1}{|a|}\sqrt{1-a}$. Om $a > 1$ så saknas reella lösningar.