Lösningsförslag TATB01 2020-09-19

1. Först skriver vi om olikheten för att få något som är enklare att studera:

$$\frac{10}{9-3x-2x^2} \leq 1 \quad \Leftrightarrow \quad \frac{10-(9-3x-2x^2)}{9-3x-2x^2} \leq 0$$
$$\Leftrightarrow \quad \frac{2x^2+3x+1}{9-3x-2x^2} \leq 0.$$

Låt oss faktorisera täljare och nämare:

$$2x^2+3x+1 = 2\left(x^2+\frac{3}{2}x+\frac{1}{2}\right) = 2\left(\left(x+\frac{3}{4}\right)^2-\frac{1}{16}\right) = 2\left(x+\frac{1}{2}\right)(x+1)$$
$$= (2x+1)(x+1)$$

och

$$9-3x-2x^2 = -2\left(x^2+\frac{3}{2}x-\frac{9}{2}\right) = -2\left(\left(x+\frac{3}{4}\right)^2-\frac{81}{16}\right) = -2\left(x-\frac{3}{2}\right)(x+3)$$
$$= (3-2x)(x+3).$$

Vi vill således lösa olikheten

$$\frac{(2x+1)(x+1)}{(3-2x)(x+3)} \leq 0.$$

Vi gör ett teckenschema för det funna bråket ovan.

		-3		-1		$-\frac{1}{2}$		$\frac{3}{2}$	
$x+3$	$-$	0	$+$		$+$		$+$		$+$
$x+1$	$-$		$-$	0	$+$		$+$		$+$
$2x+1$	$-$		$-$		$-$	0	$+$		$+$
$3-2x$	$+$		$+$		$+$		$+$	0	$-$
$\frac{(2x+1)(x+1)}{(3-2x)(x+3)}$	$-$	☠	$+$	0	$-$	0	$+$	☠	$-$

Vi ser ur tabellen att uttrycket är icke-positivt precis då $x < -3$ eller $-1 \leq x \leq -\frac{1}{2}$ eller $x > \frac{3}{2}$.

Svar: $x < -3$ eller $-1 \leq x \leq -\frac{1}{2}$ eller $x > \frac{3}{2}$.

2. (a) Vi ser att summan är aritmetisk med 100 termer. Eftersom första termen är -2 och sista termen är $(3 \cdot 97 + 2)/2 = 293/2$, så blir

$$\sum_{k=-2}^{97} \frac{3k+2}{2} = \frac{-2+293/2}{2} \cdot 100 = 289 \cdot 25 = 7225.$$

(b) Enligt definitionen av binomialkoefficienter finner vi att

$$\binom{32}{29} = \binom{32}{3} = \frac{32 \cdot 31 \cdot 30}{3 \cdot 2} = 16 \cdot 31 \cdot 10 = 4960.$$

(c) Vi utför en polynomdivision.

$$
\begin{array}{rrrrrrrrr|l}
 & & & x^2 & + & 2\,x & - & 2 & & \\
\hline
 & x^3 & & & - & 6x & + & 7 & & \multicolumn{1}{|l}{x-2} \\
\cline{10-10}
- & (x^3 & - & 2\,x^2) & & & & & & \\
\cline{1-8}
 & & & 2\,x^2 & - & 6\,x & + & 7 & & \\
 & & - & (2\,x^2 & - & 4\,x) & & & & \\
\cline{3-8}
 & & & & - & 2\,x & + & 7 & & \\
 & & & - & (- & 2\,x & + & 4) & & \\
\cline{3-8}
 & & & & & & & 3 & & \\
\end{array}
$$

Polynomdivisionen visar att

$$x^3 - 6x + 7 = (x^2 + 2x - 2)(x - 2) + 3,$$

så $k(x) = x^2 + 2x - 2$ och $r = 3$.

Svar: (a) 7225 (b) 4960 (c) $k(x) = x^2 + 2x - 2$; $r = 3$.

3. Beloppen definieras enligt

$$|2x - 3| = \begin{cases} 2x - 3, & x \geq 3/2, \\ 3 - 2x, & x \leq 3/2, \end{cases} \qquad \text{och} \qquad |1 - 4x| = \begin{cases} 1 - 4x, & x \leq 1/4, \\ 4x - 1, & x \geq 1/4. \end{cases}$$

Intressanta punkter för de olika beloppen som ingår i ekvationen är $x = 1/4$ och $x = 3/2$. Vi delar upp i tre olika fall.

Fall 1: $x \leq 1/4$. Då är

$$3x - |2x - 3| + 1 = |1 - 4x| \quad \Leftrightarrow \quad 3x - (3 - 2x) + 1 = 1 - 4x \quad \Leftrightarrow \quad 9x = 3 \quad \Leftrightarrow \quad x = \frac{1}{3},$$

vilket *inte* uppfyller att $x \leq 1/4$. Detta är alltså ingen lösning.

Fall 2: $1/4 \leq x \leq 3/2$. Då är

$$3x - |2x - 3| + 1 = |1 - 4x| \quad \Leftrightarrow \quad 3x - (3 - 2x) + 1 = 4x - 1 \quad \Leftrightarrow \quad x = 1,$$

vilket ligger i rätt intervall. Alltså är $x = 1$ en lösning.

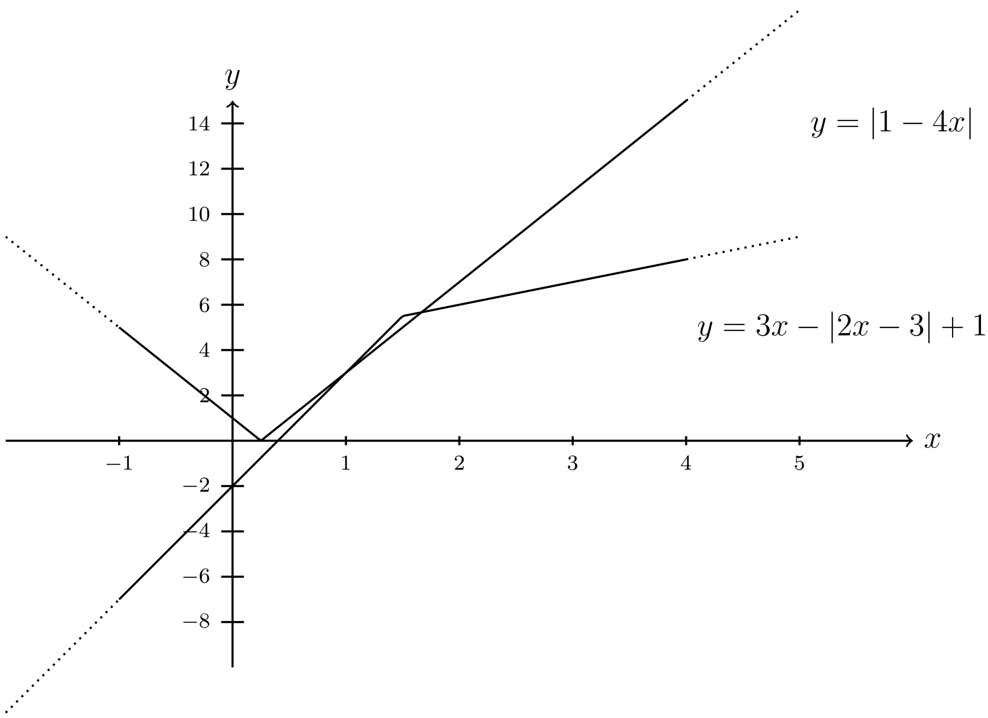
Fall 3: $x \geq 3/2$. Då är

$$3x - |2x - 3| + 1 = |1 - 4x| \quad \Leftrightarrow \quad 3x - (2x - 3) + 1 = 4x - 1 \quad \Leftrightarrow \quad 3x = 5 \quad \Leftrightarrow \quad x = 5/3,$$

vilket ligger i rätt intervall så $x = 5/3$ är en lösning.

Svar: $x = 1$ och $x = \dfrac{5}{3}$.

Man kan även skissa vänster- och högerled i en graf för att se om svaret verkar rimligt.



4. Låt oss skriva om ekvationen lite:

$$(8-8i)z^2 - 16z + 3 - 3i = 0 \quad \Leftrightarrow \quad 0 = z^2 - \frac{16}{8-8i}z + \frac{3-3i}{8-8i} = z^2 - \frac{2(1+i)}{2}z + \frac{3}{8}.$$

Vi kvadratkompletterar för att få en enklare ekvation:

$$z^2 - (1+i)z + \frac{3}{8} = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \left(z - \frac{1+i}{2}\right)^2 = \left(\frac{1+i}{2}\right)^2 - \frac{3}{8} = \frac{i}{2} - \frac{3}{8}.$$

Låt $w = z - \dfrac{1+i}{2}$ och skriv $w = x + yi$ där x, $y \in \mathbf{R}$. Vi söker de $w \in \mathbf{C}$ så att

$$w^2 = -\frac{3}{8} + \frac{i}{2}. \tag{1}$$

Då gäller att

$$x^2 + 2ixy - y^2 = -\frac{3}{8} + \frac{i}{2} \quad \Leftrightarrow \quad \begin{cases} x^2 - y^2 = -3/8, \\ xy = 1/4. \end{cases}$$

Vidare följer det av (1) att

$$x^2 + y^2 = |w|^2 = |w^2| = \left|-\frac{3}{8} + \frac{i}{2}\right| = \sqrt{\frac{9}{64} + \frac{1}{4}} = \sqrt{\frac{25}{64}} = \frac{5}{8}.$$

Härur kan vi till exempel se att

$$(x^2 - y^2) + (x^2 + y^2) = -\frac{3}{8} + \frac{5}{8} \quad \Leftrightarrow \quad 2x^2 = 1/4 \quad \Leftrightarrow \quad x = \pm\frac{1}{\sqrt{8}} = \pm\frac{\sqrt{2}}{4}.$$

Eftersom $y = 1/(4x)$ så erhåller vi lösningarna

$$w = \frac{\sqrt{2}}{4}(1+2i) \quad \Leftrightarrow \quad z = \frac{2+\sqrt{2}}{4} + i\frac{1+\sqrt{2}}{2}$$

och

$$w = -\frac{\sqrt{2}}{4}(1+2i) \quad \Leftrightarrow \quad z = \frac{2-\sqrt{2}}{4} + i\frac{1-\sqrt{2}}{2}$$

Svar: $z = \dfrac{2+\sqrt{2}}{4} + i\dfrac{1+\sqrt{2}}{2}$ eller $z = \dfrac{2-\sqrt{2}}{4} + i\dfrac{1-\sqrt{2}}{2}$.

5. Vi ser att de tre summorna i parenteserna är geometriska summor, så låt oss räkna ut dessa. Om $x \neq 1$ blir

$$x^3 + x^6 + \cdots + x^{3n} = x^3 \cdot \frac{x^{3n}-1}{x^3-1}$$

eftersom kvoten är x^3, första termen är x^3 och antalet termer i summan är n. Vidare blir, om $x \neq -1$,

$$x - x^2 + x^3 + \cdots + x^n = x \cdot \frac{1-(-x)^n}{1+x}$$

eftersom kvoten är $-x$, första termen är x och antalet termer i summan är n. Om $x \neq \pm 1$ blir

$$x^2 + x^4 + \cdots + x^{2n} = x^2 \cdot \frac{x^{2n}-1}{x^2-1}$$

då kvoten är x^2, första termen är x^2 och antalet termer är n.

Därmed kan kvoten, för $x > 0$ och $x \neq 1$, skrivas

$$\begin{aligned}
\frac{x^4(x^{3n}-1)(1-(-x)^n)}{(x^3-1)(1+x)} \cdot \frac{x^2-1}{x^2(x^{2n}-1)} &= \frac{x^2(x^{3n}-1)(1-(-x)^n)}{(x^3-1)(1+x)} \cdot \frac{(x+1)(x-1)}{(x^n-1)(x^n+1)} \\
&= \frac{x^2(x^{3n}-1)(1-(-x)^n)}{x^3-1} \cdot \frac{x-1}{(x^n-1)(x^n+1)}.
\end{aligned}$$

Notera nu att

$$(x-1)\big(x^2+x+1\big) = x^3-1 \quad \text{och därmed även} \quad (x^n-1)\big(x^{2n}+x^n+1\big) = x^{3n}-1,$$

så kvoten kan förenklas till

$$\frac{x^2(x^n-1)(x^{2n}+x^n+1)(1-(-x)^n)(x-1)}{(x-1)(x^2+x+1)(x^n-1)(x^n+1)} = \frac{x^2(x^{2n}+x^n+1)(1-(-x)^n)}{(x^2+x+1)(x^n+1)}.$$

Eftersom n är udda så är $(-x)^n = -x^n$, så vi erhåller kvoten

$$\frac{x^2(x^{2n}+x^n+1)(1+x^n)}{(x^2+x+1)(x^n+1)} = \frac{x^2(x^{2n}+x^n+1)}{x^2+x+1}.$$

Genom direkt kontroll ser vi att om $x = 1$ blir ursprungskvoten

$$\frac{(1+1+\cdots+1)(1-1+1-\cdots-1+1)}{1+1+\cdots+1} = \frac{n \cdot 1}{n} = 1,$$

vilket stämmer överens med

$$\left.\frac{x^2(x^{2n}+x^n+1)}{x^2+x+1}\right|_{x=1} = \frac{1 \cdot 3}{3} = 1.$$

Svar: Kvoten blir $\dfrac{x^2(x^{2n}+x^n+1)}{x^2+x+1}$ för alla $x > 0$ och $n = 1, 3, 5, \ldots$