Lösningsförslag matematisk grundkurs 2020-10-28

1. (a) Först skriver vi om olikheten för att få något som är enklare att studera:

$$\frac{x^2+1}{2x-1} \geq 2 \quad \Leftrightarrow \quad \frac{x^2+1-2(2x-1)}{2x-1} = \frac{x^2-4x+3}{2x-1} \geq 0$$

Vi ser vidare att

$$x^2-4x+3 = (x-2)^2-1 = (x-3)(x-1)$$

så vi ska undersöka när

$$\frac{(x-3)(x-1)}{2x-1} \geq 0.$$

Vi gör ett teckenschema för det funna uttrycket.

		$1/2$		1		3	
$2x-1$	$-$	0	$+$		$+$		$+$
$x-1$	$-$		$-$	0	$+$		$+$
$x-3$	$-$		$-$		$-$	0	$+$
$\dfrac{(x-3)(x-1)}{2x-1}$	$-$	☠	$+$	0	$-$	0	$+$

Vi ser ur tabellen att uttrycket är positivt precis då $1/2 < x \leq 1$ eller $x \geq 3$.

(b) Summan är aritmetisk och vi ser att för att få sista termen lika med 620 så måste

$$620 = 3n+2 \quad \Leftrightarrow \quad n = 206$$

vilket innebär att vi har 200 termer i summan. Sålunda erhåller vi

$$s = \sum_{k=7}^{n}(3k+2) = \frac{620+23}{2}\cdot 200 = 64300.$$

Svar: (a) $1/2 < x \leq 1$ eller $x \geq 3$ (b) 64300.

2. (a) Vi ser direkt ur enhetscirkeln att

$$\sin\left(2x+\frac{\pi}{7}\right) = \sin\left(5x-\frac{\pi}{3}\right) \quad \Leftrightarrow \quad \begin{cases} 2x+\dfrac{\pi}{7} = 5x-\dfrac{\pi}{3}+2\pi n,\ n\in\mathbf{Z}, \\ \qquad\text{eller} \\ 2x+\dfrac{\pi}{7} = \pi-5x+\dfrac{\pi}{3}+2\pi n,\ n\in\mathbf{Z}, \end{cases}$$

så

$$3x = \frac{\pi}{7}+\frac{\pi}{3}-2\pi n \quad \Leftrightarrow \quad x = \frac{10\pi}{63}-\frac{2\pi n}{3}$$

eller

$$7x = \frac{4\pi}{3}-\frac{\pi}{7}+2\pi n \quad \Leftrightarrow \quad x = \frac{25\pi}{147}+\frac{2\pi n}{7}.$$

(b) Enligt en additionsformel för cosinus är

$$\cos\left(v-\frac{\pi}{4}\right)=\cos v\cos\left(\frac{\pi}{4}\right)+\sin v\sin\left(\frac{\pi}{4}\right)=\frac{\sqrt{2}}{2}\cdot\cos v+\frac{\sqrt{2}}{2}\cdot\sin v$$
$$=-\frac{2}{3}+\frac{\sqrt{2}}{6}=-\frac{1}{6}\left(4-\sqrt{2}\right)$$

eftersom

$$\cos^2 v=1-\sin^2 v=1-\frac{1}{9}=\frac{8}{9}\quad\Rightarrow\quad\cos v=-\frac{2\sqrt{2}}{3}$$

ty $\pi/2<v<\pi$ så $\cos v<0$.

(c) Då

$$\frac{111\pi}{10}=\frac{110\pi}{10}+\frac{\pi}{10}=10\pi+\pi+\frac{\pi}{10}$$

så är

$$\sin\left(\frac{111\pi}{10}\right)=-\sin\left(\frac{\pi}{10}\right)$$

och därmed blir

$$\arcsin\left(\sin\left(\frac{111\pi}{10}\right)\right)=-\arcsin\left(\sin\left(\frac{\pi}{10}\right)\right)=-\frac{\pi}{10}$$

eftersom arcsin är udda och $-\pi/2<\pi/10<\pi/2$.

Svar: (a) $\frac{10\pi}{63}-\frac{2\pi n}{3}$, $n\in\mathbf{Z}$, eller $\frac{25\pi}{147}+\frac{2\pi n}{7}$, $n\in\mathbf{Z}$ (b) $-\frac{1}{6}\left(4-\sqrt{2}\right)$ (c) $-\frac{\pi}{10}$.

3. (a) För att samtliga ingående logaritmer ska vara definierade så måste $3+x>0$ och $-x>0$, så $-3<x<0$. För $-3<x<0$ så gäller att

$$\begin{aligned}\ln(3+x)-2\ln(-x)+\ln 4=0\quad&\Leftrightarrow\quad\ln(4(3+x))=2\ln(-x)=\ln x^2\\&\Leftrightarrow\quad 4(3+x)=x^2\\&\Leftrightarrow\quad 0=x^2-4x-12=(x-2)^2-16\\&\Leftrightarrow\quad x=-2\end{aligned}$$

ty ln är injektiv och $x=6>0$.

(b) Enligt algebrans regler är

$$\begin{aligned}\sqrt{\frac{y^{7/2}}{x}\left(y^3\right)^{1/4}}\left(\frac{x^2}{y}\right)^3(xy^2)^{3/2}(y^{-1})^{1/8}&=\sqrt{y^{7/2+3/4}x^{-1}}x^6y^{-3}x^{3/2}y^3y^{-1/8}\\&=y^{7/4+3/8}x^{-1/2}x^{6+3/2}y^{-1/8}=y^{7/4+2/8}x^7\\&=y^2x^7.\end{aligned}$$

Svar: (a) $x=-2$ (b) x^7y^2.

4. Låt $v=\arctan(\sqrt{2}+1)$. Enligt additionsformeln för tangens är

$$\tan 2v=\frac{2\tan v}{1-\tan^2 v}=\frac{2(\sqrt{2}+1)}{1-(\sqrt{2}+1)^2}=\frac{2(\sqrt{2}+1)}{1-(2+2\sqrt{2}+1)}=-\frac{\sqrt{2}+1}{1+\sqrt{2}}=-1.$$

Då är

$$\tan\beta=\tan 2v=-1\quad\Leftrightarrow\quad\beta=-\frac{\pi}{4}+n\pi,\ n\in\mathbf{Z},$$

där vi måste bestämma heltalet n. Vi uppskattar storleken på den ingående arcusfunktion:

$$0 < v < \frac{\pi}{2} \quad \Rightarrow \quad 0 < \beta < \pi$$

så därmed följer det att $n = 1$ är nödvändigt. Den eftersökta vinkeln är alltså

$$\beta = \pi - \frac{\pi}{4} = \frac{3\pi}{4}.$$

Svar: $\dfrac{3\pi}{4}$.

5. (a) För $a \geq 0$ definieras $\sqrt{a}$ enligt

$$y = \sqrt{a} \quad \Leftrightarrow \quad y^2 = a \textbf{ och } y \geq 0.$$

(b) Eftersom

$$y = \frac{\sinh(x)}{\cosh(x)} = \frac{(e^x - e^{-x})/2}{(e^x + e^{-x})/2} = \frac{e^{2x} - 1}{e^{2x} + 1}$$

så gäller att

$$y(e^{2x} + 1) = e^{2x} - 1 \quad \Leftrightarrow \quad e^{2x}(1 - y) = 1 + y \quad \Leftrightarrow \quad x = \frac{1}{2} \ln \frac{1 + y}{1 - y}.$$

Eftersom vi bara finner ett alternativ för varje y så är funktionen injektiv och ett uttryck för inversen ges av

$$f^{-1}(y) = \frac{1}{2} \ln \frac{1 + y}{1 - y}.$$

(c) Då

$$\sin^2(\arccos(3/5)) = 1 - \cos^2(\arccos(3/5)) = 1 - \frac{9}{25} = \frac{16}{25}$$

så följer det att $\sin(\arccos(3/5)) = 4/5$ eftersom $\sin(\arccos(3/5)) > 0$. Från definitionen av $e^{i\theta}$ ser vi nu att

$$5e^{i \arccos(3/5)} = 5\cos(\arccos(3/5)) + i5\sin(\arccos(3/5)) = 3 + 4i.$$

Svar: (a) se ovan (b) $x = \dfrac{1}{2} \ln \dfrac{1 + y}{1 - y}$ (b) $3 + 4i$.

6. Notera att

$$(1 - \sqrt{3}i)^3 z^7 = (-1 - i)^5 \;\Leftrightarrow\; z^7 = -\frac{(1 + i)^5}{(1 - \sqrt{3}i)^3} = -\frac{\left(\sqrt{2}e^{i\pi/4}\right)^5}{\left(2e^{-i\pi/3}\right)^3} = -\frac{4\sqrt{2}e^{i5\pi/4}}{8e^{-i\pi}} = \frac{\sqrt{2}}{2}e^{i5\pi/4}$$

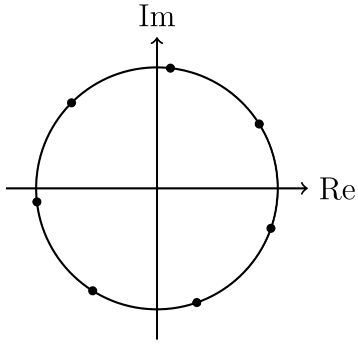
där vi enklast ser omskrivningarna genom att rita en enhetscirkel (rita en ordentlig figur!). Låt nu $z = re^{i\varphi}$, där $r \geq 0$ och $\varphi \in \mathbf{R}$. Då måste

$$z^7 = r^7 e^{i7\varphi} = \frac{\sqrt{2}}{2} e^{i5\pi/4} \quad \Leftrightarrow \quad \begin{cases} r^7 = \dfrac{1}{\sqrt{2}}, \; r \geq 0, \\ 7\varphi = 5\pi/4 + 2\pi n, \; n \in \mathbf{Z}. \end{cases} \tag{1}$$

Detta visar att $r = \left(\dfrac{1}{\sqrt{2}}\right)^{1/7} = 2^{-1/14}$ och $\varphi = \dfrac{5\pi}{28} + \dfrac{2n\pi}{7}$, $n \in \mathbf{Z}$.

Våra lösningar blir nu

$$z = 2^{-1/14}\, e^{i\left(\frac{5\pi}{28}+\frac{2n\pi}{7}\right)}, \quad n = 0, 1, 2, 3, \ldots, 6.$$



Här har vi valt att endast numrera de lösningar som är unika (när $n = 7$ får vi samma lösning som när $n = 0$ etc). Observera dock att för ekvivalensen i ekvation (1) **måste** vi ha $n \in \mathbf{Z}$ godtycklig.

Svar: $z = 2^{-1/14}\, e^{i\left(\frac{5\pi}{28}+\frac{2n\pi}{7}\right)}$, $n = 0, 1, 2, 3, \ldots, 6$.

7. Eftersom $g = f^{-1}$ så måste $x = f(g(x)) = g(x)^3 + g(x)$. På grund av detta gäller att

$$\begin{aligned}\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} g(x)^{n+2k} &= \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} (g(x))^{n-k}(g(x)^3)^k = /\ \text{binomialsatsen}\ / \\ &= (g(x) + g(x)^3)^n = x^n.\end{aligned}$$

Alltså blir summan i uppgiften en geometrisk summa med kvot x. Här är $0 < x < 5/8$ då $x \in D_g = V_f =]0, 5/8[$ (f är strängt växande). Första termen är 1 och vi har $N + 1$ termer:

$$\sum_{n=0}^{N} x^n = \frac{1 - x^{N+1}}{1 - x}.$$

Svar: $\dfrac{1 - x^{N+1}}{1 - x}$.