Lösningsförslag matematisk grundkurs 2021-01-06 14–19

1. (a) Först skriver vi om olikheten för att få något som är enklare att studera:

$$\frac{2}{x+2} \geq \frac{3}{x+3} \quad \Leftrightarrow \quad \frac{2(x+3)-3(x+2)}{(x+2)(x+3)} = \frac{-x}{(x+2)(x+3)} \geq 0$$
$$\Leftrightarrow \quad \frac{x}{(x+2)(x+3)} \leq 0.$$

Vi gör ett teckenschema för det funna uttrycket.

		-3		-2		0	
$x+3$	$-$	0	$+$		$+$		$+$
$x+2$	$-$		$-$	0	$+$		$+$
x	$-$		$-$		$-$	0	$+$
$\dfrac{x}{(x+2)(x+3)}$	$-$	☠	$+$	☠	$-$	0	$+$

Vi ser ur tabellen att uttrycket är icke-positivt precis då $x < -3$ eller $-2 < x \leq 0$.

(b) Vi kan skriva den aritmetiska summan som

$$s = \sum_{k=0}^{199} (1 + dk)$$

för någon konstant d. Om skillnaden mellan 3:e och 7:e termen ska bli 16 så måste

$$16 = 1 + 2d - (1 + 6d) = -4d \quad \Leftrightarrow \quad d = -4.$$

Alltså blir

$$s = \sum_{k=0}^{199} (1 - 4k) = \frac{1 + (1 - 4 \cdot 199)}{2} \cdot 200 = -79400.$$

(c) Låt $z = x + iy$, $x, y \in \mathbf{R}$. Då blir

$$2 = (1-i)z - 3i\bar{z} = (1-i)(x+iy) - 3i(x-iy) = x + iy - ix + y - 3ix - 3y$$
$$\Leftrightarrow \quad x - 2y = 2 \quad \text{och} \quad y - 4x = 0,$$

vilket ger att $y = 4x$ och $x = -2/7$, det vill säga $z = -\dfrac{2+8i}{7}$.

Svar: (a) $x < -3$ eller $-2 < x \leq 0$

(b) $s = -79400$ med t ex $s = \sum_{k=0}^{199} (1 - 4k)$

(c) $z = -\dfrac{2+8i}{7}$.

2. (a) Vi ser att

$$\frac{e^x - 5}{e^x + 4} = 2e^{-x} \quad \Leftrightarrow \quad e^x - 5 = 2e^{-x}(e^x + 4) \quad \Leftrightarrow \quad e^{2x} - 5e^x = 2(e^x + 4)$$
$$\Leftrightarrow \quad \left(e^x - \frac{7}{2}\right)^2 - \frac{81}{4} = 0 \quad \Leftrightarrow \quad e^x = \frac{7}{2} \pm \frac{9}{2}.$$

Då $e^x > 0$ följer det att endast $x = \ln 8 = 3 \ln 2$ en lösning.

(b) Eftersom $e^{\ln t} = t$ för $t > 0$ gäller att

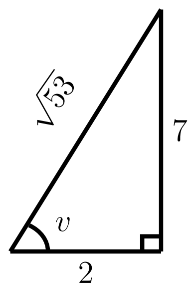
$$\ln(|\ln x|) = 2 \quad \Leftrightarrow \quad |\ln x| = e^2 \quad \Leftrightarrow \quad \ln x = \pm e^2 \quad \Leftrightarrow \quad x = \exp\left(\pm e^2\right).$$

Svar: (a) $x = 3\ln 2$ (b) $x = \exp\left(\pm e^2\right)$.

3. (a)

Låt $v = \arctan\frac{7}{2}$. Då gäller att $0 < v < \pi/2$, så vi ser direkt ur en hjälptriangel att

$$\sin v = \frac{7}{\sqrt{53}}.$$



(b) Kända trigonometriska formler visar att

$$\begin{aligned}\sin\left(\frac{\pi}{2} - x\right) + 3\sin\left(\frac{\pi}{2} + x\right) = 4\sin 2x \quad &\Leftrightarrow \quad \cos x + 3\cos x = 8\sin x\cos x \\ &\Leftrightarrow \quad (1 - 2\sin x)\cos x = 0,\end{aligned}$$

så endera måste

$$\cos x = 0 \quad \Leftrightarrow \quad x = \frac{\pi}{2} + \pi n, \quad n \in \mathbf{Z},$$

eller så är

$$1 = 2\sin x \quad \Leftrightarrow \quad \sin x = \frac{1}{2} \quad \Leftrightarrow \quad \begin{cases} x = \dfrac{\pi}{6} + 2\pi n, \\ \text{eller} \\ x = \dfrac{5\pi}{6} + 2\pi n. \end{cases}$$

Svar:
(a) $\sin\left(\arctan\left(\frac{7}{2}\right)\right) = \frac{7}{\sqrt{53}}$
(b) $x = \frac{\pi}{2} + \pi n$, $n \in \mathbf{Z}$, $x = \frac{\pi}{6} + 2\pi n$, $n \in \mathbf{Z}$, eller $x = \frac{5\pi}{6} + 2\pi n$, $n \in \mathbf{Z}$.

4. Vi använder oss av hjälpvinkelmetoden och skriver om $f(x)$ enligt

$$2\cos 3x - 2\sin 3x = C\sin(3x + \varphi)$$

med $C > 0$. Då ska alltså, enligt additionsformeln för sinus,

$$C\sin(3x + \varphi) = C\left(\sin 3x\cos\varphi + \sin\varphi\cos 3x\right) = 2\cos 3x - 2\sin 3x.$$

Genom att, till exempel, låta $x = 0$ och $x = \pi/6$, erhåller vi sambanden

$$\begin{cases} C\sin\varphi &= 2, \\ C\cos\varphi &= -2. \end{cases}$$

För att bestämma C kvadrerar vi dessa ekvationer och summerar för att finna att

$$C^2 = C^2(\sin^2\varphi + \cos^2\varphi) = 2^2 + (-2)^2 = 8.$$

Alltså är $C = \sqrt{8} = 2\sqrt{2}$ ett lämpligt val, och vi finner φ genom att lösa

$$\begin{cases} \cos\varphi &= -\dfrac{1}{\sqrt{2}}, \\ \sin\varphi &= \dfrac{1}{\sqrt{2}} \end{cases} \quad \Leftrightarrow \quad \varphi = \frac{3\pi}{4} + 2m\pi,\ m \in \mathbf{Z}.$$

Rita en enhetscirkel för att se detta! Vi väljer $\varphi = \dfrac{3\pi}{4}$.

Därmed kan vi säga att

$$f(x) = 2\sqrt{2}\sin\left(3x + \frac{3\pi}{4}\right).$$

Vi ser då att

$$f(x) = \sqrt{6} \quad \Leftrightarrow \quad \sin\left(3x + \frac{3\pi}{4}\right) = \frac{\sqrt{6}}{2\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

så

$$3x + \frac{3\pi}{4} = \frac{\pi}{3} + 2\pi n \quad \Leftrightarrow \quad x = -\frac{5\pi}{36} + \frac{2\pi n}{3}$$

eller

$$3x + \frac{3\pi}{4} = \frac{2\pi}{3} + 2\pi n \quad \Leftrightarrow \quad x = -\frac{\pi}{36} + \frac{2\pi n}{3}.$$

Svar: $f(x) = 2\sqrt{2}\sin\left(3x + \dfrac{3\pi}{4}\right)$; $x = -\dfrac{5\pi}{36} + \dfrac{2\pi n}{3}$, $n \in \mathbf{Z}$, eller $x = -\dfrac{\pi}{36} + \dfrac{2\pi n}{3}$, $n \in \mathbf{Z}$.

5. Vi börjar med att reda ut största möjliga definitionsmängd. För att kvadratroten ska vara definierad måste vi kräva att

$$\ln\left(\frac{1-x}{2-x}\right) \geq 0 \quad \Leftrightarrow \quad \frac{1-x}{2-x} \geq 1 \quad \Leftrightarrow \quad \frac{1-x-(2-x)}{2-x} = \frac{-1}{2-x} \geq 0 \quad \Leftrightarrow \quad x > 2.$$

Notera även att om $\dfrac{1-x}{2-x} \geq 1$ så är $\ln\left(\dfrac{1-x}{2-x}\right)$ väldefinierad. Definitionsmängden blir således

$$D_f = \,]2, \infty[\,.$$

För $x \in D_f$ gäller att

$$\begin{aligned} y = \sqrt{\ln\left(\frac{1-x}{2-x}\right)} \quad &\Rightarrow \quad y^2 = \ln\left(\frac{1-x}{2-x}\right) \quad \Leftrightarrow \quad e^{y^2} = \frac{1-x}{2-x} \\ &\Leftrightarrow \quad e^{y^2}(2-x) = 1-x \quad \Leftrightarrow \quad x(1-e^{y^2}) = 1-2e^{y^2} \\ &\Leftrightarrow \quad x = \frac{1-2e^{y^2}}{1-e^{y^2}}. \end{aligned}$$

Notera speciellt implikationen ovan! Vill vi skriva ekvivalens måste vi lägga till villkoret $y \geq 0$. Men eftersom vi finner högst en lösning för varje y, så innebär detta att funktionen är injektiv och att ett uttryck för inversen ges av $f^{-1}(y) = \dfrac{1-2e^{y^2}}{1-e^{y^2}}$.

Svar: $D_f = \,]2, \infty[$, $f^{-1}(y) = \dfrac{2e^{y^2}-1}{e^{y^2}-1}$.

6. För att avgöra vilket av talen som är störst kan vi betrakta

$$\gamma = 2\alpha - 2\beta = \arctan\left(\frac{12}{5}\right) - 2\arctan\left(\frac{2}{3}\right).$$

Vi kan direkt se att

$$\tan\gamma = \frac{\tan 2\alpha - \tan 2\beta}{1 + \tan 2\alpha \cdot \tan 2\beta} = \frac{12/5 - \tan 2\beta}{1 + (12/5)\tan 2\beta}$$

och att

$$\tan 2\beta = \frac{4/3}{1 - (2/3)^2} = \frac{12}{5},$$

så

$$\frac{12/5 - \tan 2\beta}{1 + (12/5)\tan 2\beta} = \frac{12/5 - 12/5}{1 + (12/5)^2} = 0.$$

Alltså gäller att

$$\tan\gamma = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \gamma = n\pi \quad n \in \mathbf{Z},$$

där vi måste bestämma heltalet n. Eftersom

$$0 < \arctan\left(\frac{12}{5}\right) < \frac{\pi}{2}$$

och

$$0 < \arctan\left(\frac{2}{3}\right) < \arctan(1) = \frac{\pi}{4}$$

så följer det att

$$0 - 2\cdot\frac{\pi}{4} = -\frac{\pi}{2} < \gamma < \frac{\pi}{2} - 2\cdot 0 = \frac{\pi}{2}.$$

Därmed är $n = 0$ det enda heltalet som är möjligt och $\gamma = 0$. Talen α och β är alltså lika stora.

Svar: α och β är lika stora.

Alternativt: Genom att observera att

$$\frac{12}{5} = \tan 2\alpha = \frac{2\tan\alpha}{1 - \tan^2\alpha}$$

ser vi att

$$\tan^2\alpha + \frac{5}{6}\tan\alpha - 1 = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \tan\alpha = -\frac{5}{12} \pm \frac{13}{12} = \frac{2}{3}$$

eftersom $\alpha \in]0, \pi/2[$ medför att $\tan\alpha > 0$. Alltså gäller att $\tan\beta = \tan\alpha$ och eftersom $\alpha, \beta \in]0, \pi/2[$ så är $\alpha = \beta$ (tangens är injektiv på detta intervall).

7. För $\ln(t)$ så gäller olikheterna

$$\frac{t-1}{t} < \ln t < t - 1, \quad t > 0,\ t \neq 1.$$

Låt, för $n = 1, 2, \ldots$,

$$L(n) = \ln\left(\frac{2}{1}\right)\ln\left(\frac{3}{2}\right)\ln\left(\frac{4}{3}\right)\cdot\cdots\cdot\ln\left(\frac{n+1}{n}\right).$$

Notera nu att faktorerna i $L(n)$ har formen

$$\ln\left(1+\frac{1}{k}\right), \quad k = 1, 2, \ldots, n,$$

så

$$L(n) = \ln\left(1+\frac{1}{1}\right)\ln\left(1+\frac{1}{2}\right)\ln\left(1+\frac{1}{3}\right)\cdot\cdots\cdot\ln\left(1+\frac{1}{n}\right).$$

Enligt olikheten ovan kan vi uppskatta dessa faktorer enligt

$$\ln\left(1+\frac{1}{k}\right) < \frac{1}{k}$$

och

$$\ln\left(1+\frac{1}{k}\right) > \frac{1/k}{1+1/k} = \frac{1}{k+1}.$$

Sålunda gäller att

$$L(n) < \frac{1}{1}\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{3}\cdot\cdots\cdot\frac{1}{n} = \frac{1}{n!}$$

och

$$L(n) > \frac{1}{1+1}\cdot\frac{1}{2+1}\cdot\frac{1}{3+1}\cdot\cdots\cdot\frac{1}{n+1} = \frac{1}{(n+1)!}.$$

Svar: se ovan.