Lösningsförslag matematisk grundkurs 2021-01-06 8–13

1. (a) Vi kvadratkompletterar uttrycket och finner att

$$p(x) = 12x - 4x^2 - 12 = -4\left(x^2 - 3x + 3\right) = -4\left(\left(x - \frac{3}{2}\right)^2 - \frac{9}{4} + 3\right)$$
$$= -3 - (2x-3)^2 \leq -3$$

så maximum inträffar då $x = \dfrac{3}{2}$ och $p(3/2) = -3$.

(b) Vi har en geometrisk summa s med n termer, första term 2 och kvoten $1/2$:

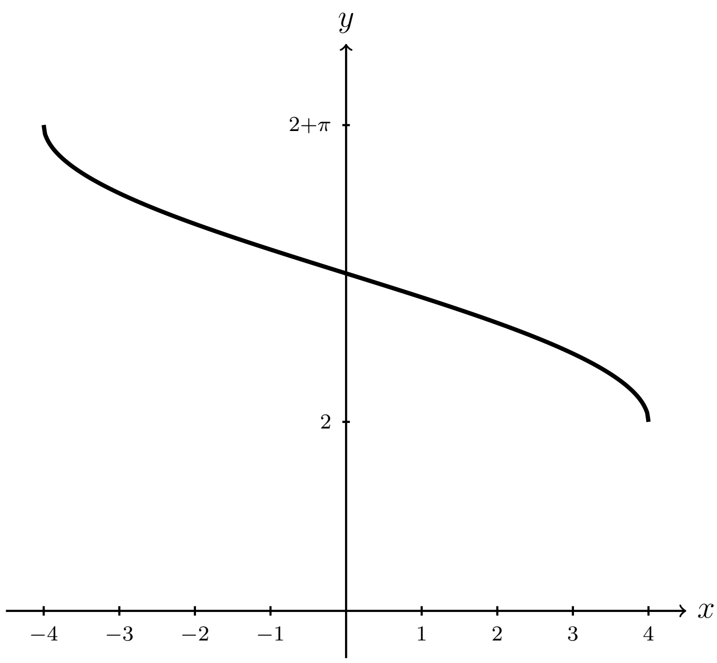
$$s = \sum_{k=0}^{n-1} \frac{2}{2^k} = 2 \cdot \frac{1 - 2^{-n}}{1 - 2^{-1}} = 4\left(1 - 2^{-n}\right).$$

För att $s \geq 1023/256$ så måste

$$4\left(1 - 2^{-n}\right) \geq \frac{1023}{256} \quad \Leftrightarrow \quad 1 - \frac{1023}{1024} = \frac{1}{1024} \geq 2^{-n} \quad \Leftrightarrow \quad n \geq 10.$$

Svar: (a) Största värdet är -3 (b) T ex $\displaystyle\sum_{k=0}^{n-1} \frac{2}{2^k}$ med minsta $n = 10$.

2. (a) Funktionen $f(x) = 2 + \arccos(x/4)$ har $D_f = [-4, 4]$ och $V_f = [2, 2+\pi]$. Grafen blir enligt nedan.



(b) Vi formulerar om ekvationen och ser att

$$5\sin x + 3 = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \sin x = -\frac{3}{5}$$
$$\Leftrightarrow \quad x = \arcsin\left(-\frac{3}{5}\right) + 2\pi n \text{ eller } x = \pi - \arcsin\left(-\frac{3}{5}\right) + 2\pi n.$$

Eftersom arcsin är udda kan vi skriva lösningarna som

$$x = 2\pi n - \arcsin\left(\frac{3}{5}\right), \quad n \in \mathbf{Z},$$

samt

$$x = \pi + \arcsin\left(\frac{3}{5}\right) + 2\pi n = \arcsin\left(\frac{3}{5}\right) + \pi(2n+1), \quad n \in \mathbf{Z}.$$

Vi noterar att $0 < \arcsin(3/5) < \pi/2$, så de enda lösningarna i intervallet $[-2\pi, 2\pi]$ blir

$$-\arcsin\left(\frac{3}{5}\right), \quad 2\pi - \arcsin\left(\frac{3}{5}\right) \qquad \text{eller} \qquad \arcsin\left(\frac{3}{5}\right) \pm \pi.$$

Svar: (a) se ovan (b) $x = 2\pi n - \arcsin\left(\frac{3}{5}\right)$, $n \in \mathbf{Z}$, eller $\arcsin\left(\frac{3}{5}\right) + \pi(2n+1)$, $n \in \mathbf{Z}$; de lösningar som ligger i intervallet $[-2\pi, 2\pi]$ är $-\arcsin\left(\frac{3}{5}\right)$, $2\pi - \arcsin\left(\frac{3}{5}\right)$ eller $\arcsin\left(\frac{3}{5}\right) \pm \pi$.

3. (a) För att samtliga logaritmer ska vara definierade så måste $x + 4 > 0$ och $x + 6 > 0$, så $x > -4$. För $x > -4$ så gäller att

$$\begin{aligned} 3\ln 2 - \ln(x+4) - \ln(x+6) = 0 \quad &\Leftrightarrow \quad \ln 8 = \ln((x+4)(x+6)) \\ &\Leftrightarrow \quad 8 = (x+4)(x+6) = x^2 + 10x + 24 \\ &\Leftrightarrow \quad 0 = x^2 + 10x + 16 = (x+5)^2 - 9 \\ &\Leftrightarrow \quad x = -2 \end{aligned}$$

ty ln är injektiv och $x = -8 \leq -4$.

(b) Vi ser att

$$2 \cdot 5^x = 3 \cdot 6^x \quad \Leftrightarrow \quad \frac{2}{3} = \left(\frac{6}{5}\right)^x \quad \Leftrightarrow \quad \ln\left(\frac{2}{3}\right) = x \ln\left(\frac{6}{5}\right) \quad \Leftrightarrow \quad x = \frac{\ln \frac{2}{3}}{\ln\left(\frac{6}{5}\right)}.$$

Svar: (a) $x = -2$ (b) $\dfrac{\ln \frac{2}{3}}{\ln\left(\frac{6}{5}\right)} = -\dfrac{\ln 3 - \ln 2}{\ln 6 - \ln 5}$.

4. Eftersom

$$2\sin^2(3x) = 1 - \cos 6x$$

visar en Euler-omskrivning att

$$\begin{aligned} 4\sin^2(3x)\cos 2x = 2(\cos 2x - \cos 6x \cos 2x) &= 2\cos 2x - 2\left(\frac{e^{i6x} + e^{-i6x}}{2}\right)\left(\frac{e^{i2x} + e^{-i2x}}{2}\right) \\ &= 2\cos 2x - \frac{1}{2}\left(e^{i8x} + e^{i4x} + e^{-i4x} + e^{-i8x}\right) \\ &= 2\cos 2x - \cos 8x - \cos 4x, \end{aligned}$$

så ekvationen i uppgiften kan ekvivalent skrivas om enligt

$$\begin{aligned} 4\sin^2(3x)\cos 2x = 3\cos 2x - \cos 4x \quad &\Leftrightarrow \quad 2\cos 2x - \cos 8x - \cos 4x = 3\cos 2x - \cos 4x \\ &\Leftrightarrow \quad \cos 2x = -\cos 8x = \cos(\pi - 8x) \\ &\Leftrightarrow \quad \pm 2x = \pi - 8x + 2\pi n, \end{aligned}$$

där $n \in \mathbf{Z}$. Alltså kommer lösningarna ges av

$$10x = \pi + 2\pi n \quad \Leftrightarrow \quad x = \frac{\pi}{10} + \frac{\pi n}{5} \qquad \text{eller} \qquad 6x = \pi + 2\pi n \quad \Leftrightarrow \quad x = \frac{\pi}{6} + \frac{\pi n}{3}.$$

Svar: $\dfrac{\pi}{10} + \dfrac{\pi n}{5}$, $n \in \mathbf{Z}$, eller $\dfrac{\pi}{6} + \dfrac{\pi n}{3}$, $n \in \mathbf{Z}$.

5. (a) För att $f(x)$ ska vara definierad måste vi kräva att

$$\frac{e^x + e^{-x}}{e^x - e^{-x}} > 0 \quad \Leftrightarrow \quad e^x - e^{-x} > 0 \quad \Leftrightarrow \quad e^x > e^{-x} \quad \Leftrightarrow \quad x > -x \quad \Leftrightarrow \quad x > 0$$

ty $e^x + e^{-x} > 0$ och exp är en strängt växande funktion. Definitionsmängden blir således $D_f =]0, \infty[$. För $x \in D_f$ gäller att

$$\begin{aligned} y = \ln\left(\frac{e^x + e^{-x}}{e^x - e^{-x}}\right) \quad &\Leftrightarrow \quad e^y = \frac{e^x + e^{-x}}{e^x - e^{-x}} \quad \Leftrightarrow \quad e^y(e^x - e^{-x}) = e^x + e^{-x} \\ &\Leftrightarrow \quad e^y(e^{2x} - 1) = e^{2x} + 1 \quad \Leftrightarrow \quad e^{2x}(e^y - 1) = e^y + 1 \\ &\Leftrightarrow \quad e^{2x} = \frac{e^y + 1}{e^y - 1} \quad \Leftrightarrow \quad x = \frac{1}{2}\ln\left(\frac{e^y + 1}{e^y - 1}\right) \end{aligned}$$

då exp och ln är varandras inverser. Alltså ges ett uttryck för f^{-1} av

$$f^{-1}(y) = \frac{1}{2}\ln\left(\frac{e^y + 1}{e^y - 1}\right).$$

(b) Vi har

$$\begin{aligned} 4\cosh 4x = 5 \quad &\Leftrightarrow \quad e^{4x} + e^{-4x} = \frac{5}{2} \quad \Leftrightarrow \quad e^{8x} - \frac{5}{2}e^{4x} + 1 = 0 \\ &\Leftrightarrow \quad \left(e^{4x} - \frac{5}{4}\right)^2 = \frac{9}{16} \quad \Leftrightarrow \quad e^{4x} = \frac{5}{4} \pm \frac{3}{4} \end{aligned}$$

så vi finner lösningarna

$$x = \frac{1}{4}\ln(2) \qquad \text{eller} \qquad x = \frac{1}{4}\ln\left(\frac{1}{2}\right).$$

Svar: (a) $D_f =]0, \infty[$, $f^{-1}(y) = \dfrac{1}{2}\ln\left(\dfrac{e^y + 1}{e^y - 1}\right)$ (b) $\pm\dfrac{1}{4}\ln 2$.

6. Vi kvadratkompletterar vänsterledet och ser att

$$\begin{aligned} z^6 + z^3 + 1 = \left(z^3 + \frac{1}{2}\right)^2 + \frac{3}{4} = 0 \quad &\Leftrightarrow \quad \left(z^3 + \frac{1}{2}\right)^2 = -\frac{3}{4} \\ &\Leftrightarrow \quad z^3 = -\frac{1}{2} \pm i\frac{\sqrt{3}}{2}. \end{aligned}$$

Vi betraktar nu två fall.

Fall 1:

$$z^3 = -\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2} = e^{i2\pi/3},$$

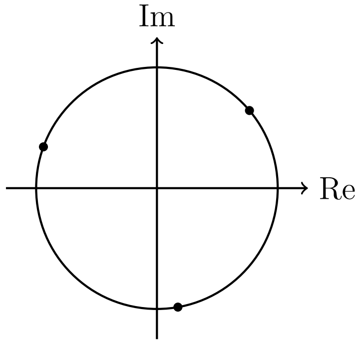
där den sista likheten enklast ses genom att rita en enhetscirkel. Låt nu $z = r_1 e^{i\varphi_1}$, där $r_1 \geq 0$ och $\varphi_1 \in \mathbf{R}$. Då måste

$$z^3 = r_1^3 e^{i3\varphi_1} = e^{i2\pi/3} \quad \Leftrightarrow \quad \begin{cases} r_1^3 = 1, \ r_1 \geq 0, \\ 3\varphi_1 = 2\pi/3 + 2\pi n, \ n \in \mathbf{Z}. \end{cases} \tag{1}$$

Detta visar att $r_1 = 1$ och $\varphi_1 = \dfrac{2\pi}{9} + \dfrac{2\pi n}{3}$, $n \in \mathbf{Z}$.

Våra lösningar blir nu

$$z = e^{i\left(\frac{2\pi}{9} + \frac{2\pi n}{3}\right)}, \quad n = 0, 1, 2.$$



Här har vi valt att endast numrera de lösningar som är unika (när $n = 3$ får vi samma lösning som när $n = 0$ etc). Observera dock att för ekvivalensen i ekvation (1) **måste** vi ha $n \in \mathbf{Z}$ godtycklig.

Fall 2:

$$z^3 = -\frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2} = e^{-i2\pi/3}.$$

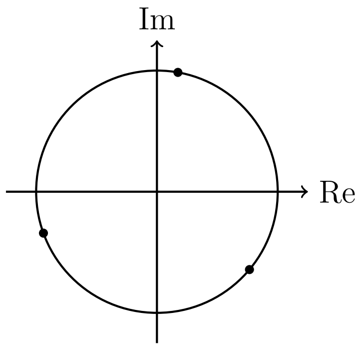
Analogt med fall 1, låt nu $z = r_2 e^{i\varphi_2}$, där $r_2 \geq 0$ och $\varphi_2 \in \mathbf{R}$. Då måste

$$z^3 = r_2^3 e^{i3\varphi_2} = e^{-i2\pi/3} \quad \Leftrightarrow \quad \begin{cases} r_2^3 = 1, \ r_2 \geq 0, \\ 3\varphi_2 = -2\pi/3 + 2\pi n, \ n \in \mathbf{Z}. \end{cases} \tag{2}$$

så $r_2 = 1$ och $\varphi_2 = -\dfrac{2\pi}{9} + \dfrac{2\pi n}{3}$, $n \in \mathbf{Z}$.

Våra lösningar i detta fall ges av

$$z = e^{i\left(-\frac{2\pi}{9} + \frac{2\pi n}{3}\right)}, \quad n = 0, 1, 2.$$



Här har vi åter igen valt att endast numrera de lösningar som är unika Observera dock att vi fortfarande **måste** ha $n \in \mathbf{Z}$ godtycklig för att ekvivalensen i ekvation (2) ska gälla.

Svar: $z = e^{i\left(\pm\frac{2\pi}{9} + \frac{2\pi n}{3}\right)}$, $n = 0, 1, 2$.

7. Kravet att $f^{-1}(2) = 1$ innebär att $1 \in D_f$ är nödvändigt och att $f(1) = 2$. Vidare är $x > 0$ nödvändigt för att $f(x)$ ska vara definierad och att för $x > 0$ så kommer $f(x) > 0$. Låt $x > 0$. Då gäller att

$$f(x) = 2\sqrt{x}e^{-(\ln x)^2} = 2e^{\frac{1}{2}\ln x}e^{-(\ln x)^2} = 2\exp\left(-t^2 + \frac{1}{2}t\right)$$

om vi låter $t = \ln x$. Kvadratkomplettering visar nu att

$$f(x) = 2\exp\left(-t^2 + \frac{1}{2}t\right) = 2\exp\left(\frac{1}{16} - \left(t - \frac{1}{4}\right)^2\right).$$

Vi kan nu notera att uttrycket $\frac{1}{16} - \left(t - \frac{1}{4}\right)^2$ är strängt växande på $]-\infty, 1/4]$ och strängt avtagande på $[1/4, \infty[$. Eftersom både ln och exp är strängt växande innebär det att de största intervall på vilka f har invers ges av $\ln x \leq 1/4$ och $\ln x \geq 1/4$, det vill säga $0 < x \leq e^{1/4}$ respektive $x \geq e^{1/4}$ och då 1 tillhör D_f måste $D_f =]0, e^{1/4}]$, ty $e^{1/4} > 1$.

Vi söker nu ett uttryck för inversen till f på detta intervall. Eftersom ln är injektiv vet vi att

$$y = 2\exp\left(\frac{1}{16} - \left(t - \frac{1}{4}\right)^2\right) \quad \Leftrightarrow \quad \frac{1}{16} - \ln\left(\frac{y}{2}\right) = \left(t - \frac{1}{4}\right)^2$$

och därmed gäller att

$$t = \ln x = \frac{1}{4} \pm \sqrt{\frac{1}{16} - \ln\left(\frac{y}{2}\right)}.$$

För att $1 \in D_f$ så är den enda möjligheten

$$\ln x = \frac{1}{4} - \sqrt{\frac{1}{16} - \ln\left(\frac{y}{2}\right)}.$$

Ett uttryck för den eftersöka inversen ges därmed av

$$f^{-1}(y) = \exp\left(\frac{1}{4} - \sqrt{\frac{1}{16} - \ln\left(\frac{y}{2}\right)}\right).$$

Svar: $D_f =]0, e^{1/4}]$, $f^{-1}(y) = \exp\left(\frac{1}{4} - \sqrt{\frac{1}{16} - \ln\left(\frac{y}{2}\right)}\right)$.

Anmärkning. Notera att uttrycket under kvadratroten är definierat då

$$\frac{1}{16} - \ln\left(\frac{y}{2}\right) \geq 0 \quad \Leftrightarrow \quad \ln\left(\frac{y}{2}\right) \leq \frac{1}{16} \quad \Leftrightarrow \quad \frac{y}{2} \leq e^{\frac{1}{16}} \quad \Leftrightarrow \quad y \leq 2e^{\frac{1}{16}}$$

eftersom ln är strängt växande. Vi ser att detta är uppfyllt om $x \in D_f$ (maximum inträffar då $x = e^{1/4}$).