Lösningsförslag matematisk grundkurs 2021-08-17 14–19

1. (a) Låt oss stuva om i ekvationen för att sedan kvadrera båda leden (observera att det då bara blir en implikation!):

$$\begin{aligned}
\sqrt{2x+30}+x+3=0 \quad &\Leftrightarrow \quad \sqrt{2x+30}=-3-x \\
&\Rightarrow \quad 2x+30=(-3-x)^2=x^2+6x+9 \\
&\Leftrightarrow \quad x^2+4x-21=0 \\
&\Leftrightarrow \quad (x+2)^2=25 \\
&\Leftrightarrow \quad x=-2\pm\sqrt{25} \\
&\Leftrightarrow \quad x=3 \quad \text{eller} \quad x=-7.
\end{aligned}$$

Eftersom vi har en implikation **måste** svaren testas. Om $x=-7$ ser vi att

$$\text{VL}=\sqrt{16}-7+3=0=\text{HL},$$

så $x=-7$ är en lösning. Om $x=3$ är

$$\text{VL}=\sqrt{36}+3+3=6+6=12\neq 0=\text{HL}.$$

Eftersom vänsterled och högerled *inte* stämmer överens så är $x=3$ inte en lösning.

(b) Om vi skriver om z enligt

$$z=2i-\frac{5+6i}{3-4i}=\frac{6i+8-5-6i}{3-4i}=\frac{3}{3-4i}$$

så följer det att

$$|z|=\left|\frac{3}{3-4i}\right|=\frac{3}{|3-4i|}=\frac{3}{\sqrt{3^2+(-4)^2}}=\frac{3}{\sqrt{25}}=\frac{3}{5}.$$

(c) Vi ser att summan är aritmetisk med $950-49+1=902$ termer. Då första termen är 99 och sista termen är 1901, så blir

$$\sum_{k=49}^{950}(1+2k)=\frac{99+1901}{2}\cdot 902=902000.$$

Svar: (a) $x=-7$ (b) $\frac{3}{5}$ (c) 902000.

2. (a) Vi ser direkt ur enhetscirkeln att

$$\cos\left(x+\frac{\pi}{7}\right)=\cos\left(3x+\frac{\pi}{5}\right) \quad \Leftrightarrow \quad \pm\left(x+\frac{\pi}{7}\right)=3x+\frac{\pi}{5}+2\pi n,\ n\in\mathbf{Z},$$

så

$$-2x=\frac{\pi}{5}-\frac{\pi}{7}+2\pi n \quad \Leftrightarrow \quad x=-\frac{\pi}{35}-\pi n$$

eller

$$-4x=\frac{\pi}{7}+\frac{\pi}{5}+2\pi n \quad \Leftrightarrow \quad x=-\frac{3\pi}{35}-\frac{\pi n}{2}.$$

(b) Låt $v = \arccos \frac{1}{5}$. Enligt trig-ettan är

$$\sin^2 v = 1 - \cos^2 v = 1 - \left(\frac{1}{5}\right)^2 = 1 - \frac{1}{25} = \frac{24}{25},$$

så eftersom $0 < v = \arccos \frac{1}{5} < \frac{\pi}{2}$ så blir

$$\sin v = \frac{\sqrt{24}}{5} = \frac{2\sqrt{6}}{5}$$

med positivt tecken då $\sin v > 0$ om $v \in]0, \pi[$.

Alternativ: rita en rätvinklig triangel.

(c) Vi noterar att $\frac{48\pi}{5} = \frac{50\pi}{5} - \frac{2\pi}{5} = 10\pi - \frac{2\pi}{5}$, så

$$\sin\left(\frac{48\pi}{5}\right) = \sin\left(-\frac{2\pi}{5}\right).$$

Eftersom $\arcsin(\sin t) = t$ om $|t| \leq \pi/2$ blir därmed

$$\arcsin\left(\sin\left(\frac{48\pi}{5}\right)\right) = \arcsin\left(\sin\left(-\frac{2\pi}{5}\right)\right) = -\frac{2\pi}{5}.$$

Svar: (a) $x = -\frac{\pi}{35} - \pi n$, $n \in \mathbf{Z}$, eller $x = -\frac{3\pi}{35} - \frac{\pi n}{2}$, $n \in \mathbf{Z}$ (b) $\frac{2\sqrt{6}}{5}$ (c) $-\frac{2\pi}{5}$.

3. (a) För att samtliga logaritmer ska vara definierade så måste vi ha $3 - x > 0$, $-x > 0$ och $|x| < \sqrt{2}$, så vi antar att $-\sqrt{2} < x < 0$. Då gäller att

$$\begin{aligned} \ln(3-x) - \ln(-x) = \ln(2-x^2) + 2\ln 2 \quad &\Leftrightarrow \quad \ln(3-x) = \ln(4(2-x^2)(-x)) \\ &\Leftrightarrow \quad 3 - x = -4x(2-x^2) \\ &\Leftrightarrow \quad 4x^3 - 7x - 3 = 0, \end{aligned}$$

eftersom ln är injektiv. Vi gissar en rot och ser att $x = -1$ löser ekvationen. Polynomdivision med $x + 1$ visar att

$$4x^3 - 7x - 3 = (x+1)(4x^2 - 4x - 3).$$

Detta uttryck blir 0 precis då $x = -1$ eller då

$$4x^2 - 4x - 3 = 0 \quad \Leftrightarrow \quad 0 = x^2 - x - \frac{3}{4} = \left(x - \frac{1}{2}\right)^2 - 1 = \left(x - \frac{3}{2}\right)\left(x + \frac{1}{2}\right),$$

så $x = \frac{3}{2}$ eller $x = -\frac{1}{2}$. Av dessa tre möjligheter är det endast $x = -1$ och $x = -\frac{1}{2}$ som är lösningar (eftersom $-\sqrt{2} < x < 0$).

(b) Vi ser att

$$1 = e^x + e^{x+1} = e^x(1 + e^1) \quad \Leftrightarrow \quad e^x = \frac{1}{1+e} \quad \Leftrightarrow \quad x = \ln\frac{1}{1+e} = -\ln(1+e).$$

Svar: (a) $x = -1$ eller $x = -\frac{1}{2}$ (b) $x = -\ln(1+e)$.

4. En Euler-omskrivning visar att

$$\begin{aligned}\sin x \cdot \sin 3x \cdot \sin 5x &= \left(\frac{e^{ix}-e^{-ix}}{2i}\right)\left(\frac{e^{i3x}-e^{-i3x}}{2i}\right)\left(\frac{e^{i5x}-e^{-i5x}}{2i}\right)\\ &= -\frac{1}{8i}\left(e^{i4x}-e^{-i2x}-e^{i2x}+e^{-i4x}\right)\left(e^{i5x}-e^{-i5x}\right)\\ &= -\frac{1}{8i}\left(e^{i9x}-e^{-ix}-e^{i3x}+e^{-i7x}-e^{i7x}+e^{-i3x}+e^{ix}-e^{-i9x}\right)\\ &= \frac{1}{4}\left(\sin 3x+\sin 7x-\sin x-\sin 9x\right),\end{aligned}$$

så ekvationen kan ekvivalent skrivas om enligt

$$\begin{aligned}4\sin x \cdot \sin 3x \cdot \sin 5x = \sin 3x - \sin x \quad &\Leftrightarrow \quad \sin 7x = \sin 9x\\ &\Leftrightarrow \quad 7x = 9x + 2\pi n \quad \text{eller} \quad 7x = \pi - 9x + 2\pi n,\end{aligned}$$

där $n \in \mathbf{Z}$. Alltså kommer lösningarna ges av

$$x = -\pi n \quad \text{eller} \quad 16x = \pi + 2\pi n \quad \Leftrightarrow \quad x = \frac{\pi}{16} + \frac{\pi n}{8}.$$

Svar: $\frac{1}{4}\left(\sin 3x + \sin 7x - \sin x - \sin 9x\right)$; $x = -\pi n$, $n \in \mathbf{Z}$, eller $x = \frac{\pi}{16} + \frac{\pi n}{8}$, $n \in \mathbf{Z}$.

5. Vi ser att

$$\frac{2i-2}{\sqrt{3}+i} = \frac{\sqrt{8}e^{i3\pi/4}}{2e^{i\pi/6}} = \frac{2\sqrt{2}}{2}\,e^{i3\pi/4-i\pi/6} = \sqrt{2}\,e^{i7\pi/12},$$

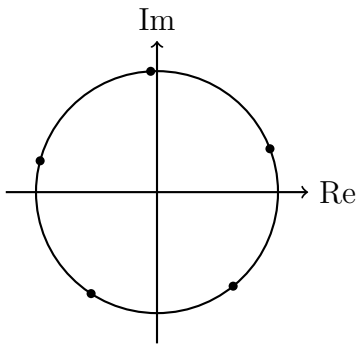
där vi enklast ser omskrivningarna genom att rita en enhetscirkel (rita en ordentlig figur!). Låt nu $z = re^{i\varphi}$, där $r \geq 0$ och $\varphi \in \mathbf{R}$. Då måste

$$z^5 = r^5 e^{i5\varphi} = \sqrt{2}\,e^{i7\pi/12} \quad \Leftrightarrow \quad \begin{cases} r^5 = \sqrt{2},\ r \geq 0,\\ 5\varphi = 7\pi/12 + 2\pi n,\ n \in \mathbf{Z}.\end{cases} \tag{1}$$

Detta visar att $r = 2^{1/10}$ och $\varphi = \frac{7\pi}{60} + \frac{2n\pi}{5}$, $n \in \mathbf{Z}$.

Våra lösningar blir nu

$$z = 2^{1/10}\,e^{i\left(\frac{7\pi}{60}+\frac{2n\pi}{5}\right)}, \quad n = 0,1,2,3,4.$$



Här har vi valt att endast numrera de lösningar som är unika (när $n = 5$ får vi samma lösning som när $n = 0$ etc). Observera dock att för ekvivalensen i ekvation (1) **måste** vi ha $n \in \mathbf{Z}$ godtycklig.

Svar: $z = 2^{1/10}\,e^{i\left(\frac{7\pi}{60}+\frac{2n\pi}{5}\right)}$, $n = 0,1,2,3,4$.

6. Låt $t = 2^{-x}$. Då är $t > 0$ och för att $f(x)$ ska vara definierad måste

$$4^{-x} - 6 \cdot 2^{-x} = t^2 - 6t = t(t-6) \geq 0.$$

Då $t > 0$ så måste därför

$$t \geq 6 \quad \Leftrightarrow \quad 2^{-x} \geq 6 \quad \Leftrightarrow \quad -x\ln 2 \geq \ln 6 \quad \Leftrightarrow \quad x \leq -\frac{\ln 6}{\ln 2}$$

eftersom ln är strängt växande. Detta är vår definitionsmängd D_f.

För $x \in D_f$ så gäller att

$$y = \sqrt{4^{-x} - 6 \cdot 2^{-x}} = \sqrt{t^2 - 6t} \quad \Rightarrow \quad y^2 = t^2 - 6t = (t-3)^2 - 9$$
$$\Leftrightarrow \quad (t-3)^2 = y^2 + 9 \quad \Leftrightarrow \quad t = 3 \pm \sqrt{y^2+9}.$$

Det faktum att $t > 0$ medför att $t = 3 + \sqrt{y^2+9}$ är den enda möjligheten. Alltså måste

$$2^{-x} = t = 3 + \sqrt{y^2+9} \quad \Leftrightarrow \quad -x \ln 2 = \ln(3 + \sqrt{y^2+9}) \quad \Leftrightarrow \quad x = -\frac{\ln(3+\sqrt{y^2+9})}{\ln 2}.$$

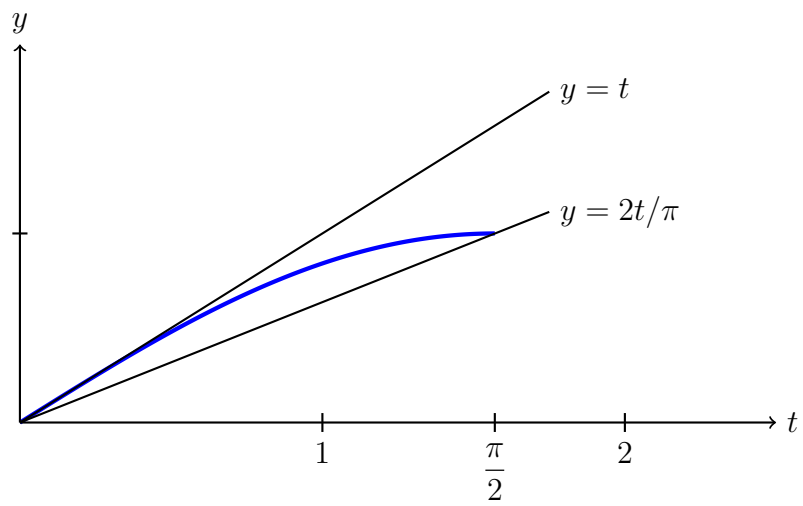
Detta är alltså $f^{-1}(y)$, dvs

$$f^{-1}(y) = -\frac{\ln(3+\sqrt{y^2+9})}{\ln 2},$$

eftersom vi finner högst en lösning för varje y (vilket innebär att funktionen är injektiv).

Svar: $D_f = \left]-\infty, -\frac{\ln 6}{\ln 2}\right]$, $f^{-1}(y) = -\frac{\ln(3+\sqrt{y^2+9})}{\ln 2}$.

7. För $0 < t < \frac{\pi}{2}$ så gäller den kända olikheten $\sin t < t$. Nedanstående figur ger sedan att $\sin t > \frac{2t}{\pi}$ för $0 < t < \frac{\pi}{2}$.



Så med $t = x^k$ erhåller vi, för $0 < x < 1$, att

$$\frac{2x^k}{\pi} < \sin(x^k) < x^k \quad \Rightarrow \quad \frac{2}{\pi}\sum_{k=1}^{n} x^k < \sum_{k=1}^{n} \sin(x^k) < \sum_{k=1}^{n} x^k.$$

Eftersom summan som trillar ut i både vänster- och högerled är geometrisk kan vi beräkna den med känd formel:

$$\sum_{k=1}^{n} x^k = x \cdot \frac{1-x^n}{1-x} = \frac{x - x^{n+1}}{1-x}.$$

Sålunda har vi nu visat att

$$\frac{2}{\pi}\frac{x - x^{n+1}}{1 - x} < \sum_{k=1}^{n} \sin(x^k) < \frac{x - x^{n+1}}{1 - x}$$

för $0 < x < 1$.

Svar: se ovan.