Lösningsförslag matematisk grundkurs 2024-08-20

1. (a) Vi stuvar om lite i olikheten:

$$\frac{6}{x^2-1} > \frac{x}{x-1} \quad\Leftrightarrow\quad \frac{6}{x^2-1} - \frac{x}{x-1} > 0 \quad\Leftrightarrow\quad \frac{6-x(x+1)}{x^2-1} > 0$$
$$\Leftrightarrow\quad \frac{x^2+x-6}{x^2-1} < 0.$$

Kvadratkomplettering och faktorisering av täljaren visar att

$$x^2+x-6 = \left(x+\frac{1}{2}\right)^2 - \frac{25}{4} = \left(x+\frac{1}{2}+\frac{5}{2}\right)\left(x+\frac{1}{2}-\frac{5}{2}\right) = (x+3)(x-2)$$

och nämnaren kan i sin tur skrivas $x^2-1=(x+1)(x-1)$. Vi gör en teckentabell.

		-3		-1		1		2	
$x+3$	$-$	0	$+$		$+$		$+$		$+$
$x+1$	$-$		$-$	0	$+$		$+$		$+$
$x-1$	$-$		$-$		$-$	0	$+$		$+$
$x-2$	$-$		$-$		$-$		$-$	0	$+$
$\dfrac{(x+3)(x-2)}{(x+1)(x-1)}$	$+$	0	$-$	☠	$+$	☠	$-$	0	$+$

Ur teckentabellen ser vi att uttrycket är negativt då $-3 < x < -1$ eller $1 < x < 2$.

(b) Låt $z = x+iy$, $x, y \in \mathbf{R}$. Då gäller att

$$3z - i\bar{z} = 2i + \operatorname{Re} z \quad\Leftrightarrow\quad 3(x+iy) - i(x-iy) = 2i + x \quad\Leftrightarrow\quad 3x - y = x \text{ och } 3y - x = 2.$$

Därmed måste $y = 4/5$ och $x = 2/5$, så $z = 2/5 + 4i/5$ är den enda lösningen till ekvationen.

Svar: (a) $-3 < x < -1$ eller $1 < x < 2$ (b) $z = \dfrac{2}{5} + i\dfrac{4}{5}$.

2. (a) Ekvationen kan formuleras om enligt

$$\frac{e^{3x}+12}{e^x} = 3e^x + 4 \quad\Leftrightarrow\quad e^{3x} + 12 = 3e^{2x} + 4e^x \quad\Leftrightarrow\quad e^{3x} - 3e^{2x} - 4e^x + 12 = 0.$$

Vi låter $t = e^x > 0$ och löser ekvationen

$$t^3 - 3t^2 - 4t + 12 = 0$$

genom att först testa fram en rot. Exempelvis $t = 2$ är en lösning. Polynomdivision med $t-2$ visar sedan att

$$t^3 - 3t^2 - 4t + 12 = (t-2)(t^2 - t - 6).$$

Kvadratkomplettering av den andra faktorn i högerledet visar att

$$t^2 - t - 6 = \left(t - \frac{1}{2}\right)^2 - \frac{25}{4} = 0 \quad\Leftrightarrow\quad t - \frac{1}{2} = \pm\frac{5}{2} \quad\Leftrightarrow\quad t = -2 \text{ eller } t = 3.$$

Eftersom $t > 0$ så kan inte $t = -2$ vara en lösning. Däremot är

$$t = e^x = 2 \quad \Leftrightarrow \quad x = \ln 2$$

och

$$t = e^x = 3 \quad \Leftrightarrow \quad x = \ln 3$$

lösningar (där vi har ekvivalenser eftersom exp är injektiv).

(b) För att allt ska vara definierat måste

$$2 - e^x > 0 \quad \Leftrightarrow \quad x < \ln 2,$$

eftersom exp är strängt växande. Vi stuvar om i ekvationen och finner att

$$\begin{aligned}
\ln(2+e^x) + \ln(2-e^x) = 0 \quad &\Leftrightarrow \quad \ln((2+e^x)(2-e^x)) = 0 \\
&\Leftrightarrow \quad (2+e^x)(2-e^x) = 1 \quad \Leftrightarrow \quad 4 - e^{2x} = 1 \\
&\Leftrightarrow \quad e^{2x} = 3 \quad \Leftrightarrow \quad 2x = \ln 3 \quad \Leftrightarrow \quad x = \frac{1}{2}\ln 3
\end{aligned}$$

eftersom ln är injektiv. Vi noterar här att

$$\frac{1}{2}\ln 3 < \frac{1}{2}\ln 4 = \frac{1}{2} \cdot 2\ln 2 = \ln 2$$

då ln är strängt växande, så detta är en lösning.

Svar: (a) $\ln 2$ eller $\ln 3$ (b) $\dfrac{1}{2}\ln 3$.

3. **Svar**: (a) $x = \dfrac{3\pi}{70} + \dfrac{2\pi n}{7}$, $n \in \mathbf{Z}$, eller $x = \dfrac{7\pi}{10} + 2\pi n$, $n \in \mathbf{Z}$ (b) $\dfrac{\sqrt{8}}{3} = \dfrac{2\sqrt{2}}{3}$ (c) $-\dfrac{2\pi}{5}$.

4. En Euler-omskrivning visar att

$$\begin{aligned}
4\sin 3x \cdot \sin 4x \cdot \cos 5x &= 4\left(\frac{e^{i3x} - e^{-i3x}}{2i}\right)\left(\frac{e^{i4x} - e^{-i4x}}{2i}\right)\left(\frac{e^{i5x} + e^{-i5x}}{2}\right) \\
&= -\frac{1}{2}\left(e^{i7x} - e^{-ix} - e^{ix} + e^{-i7x}\right)\left(e^{i5x} + e^{-i5x}\right) \\
&= -\frac{1}{2}\left(e^{i12x} + e^{i2x} - e^{i4x} - e^{-i6x} - e^{i6x} - e^{-i4x} + e^{-i2x} + e^{-i12x}\right) \\
&= \cos 4x + \cos 6x - \cos 2x - \cos 12x,
\end{aligned}$$

så ekvationen kan ekvivalent skrivas om enligt

$$\begin{aligned}
\cos 2x + 4\sin 3x \cdot \sin 4x \cdot \cos 5x = \cos 6x \quad &\Leftrightarrow \quad \cos 12x = \cos 4x \\
&\Leftrightarrow \quad 12x = 4x + 2\pi n \quad \text{eller} \quad 12x = -4x + 2\pi n,
\end{aligned}$$

där $n \in \mathbf{Z}$. Alltså kommer lösningarna ges av

$$x = \frac{\pi n}{4} \quad \text{eller} \quad x = \frac{\pi n}{8}.$$

Här ser vi att den första lösningsskaran återfinns i den andra.

Svar: $x = \dfrac{\pi n}{8}$, $n \in \mathbf{Z}$.

5. (a) Enligt additionsformel för tangens följer det att

$$\tan\alpha = \frac{3+7}{1-3\cdot 7} = \frac{10}{-20} = -\frac{1}{2}.$$

Således måste $\alpha = \arctan(-1/2) + n\pi = n\pi - \arctan(1/2)$ för något $n \in \mathbf{Z}$. Vi uppskattar storleken på ingående arcusfunktioner:

$$0 < \arctan(1/2) < \arctan 3 < \arctan 7 < \frac{\pi}{2},$$

där vi använt att arctan är strängt växande. Alltså måste

$$0 + 0 < \arctan 3 + \arctan 7 < \frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{2} \quad \Leftrightarrow \quad 0 < \alpha < \pi,$$

så det följer att $n = 1$ är nödvändigt (den enda möjligheten för att ovanstående olikhet ska gälla). Sålunda blir $\alpha = \pi - \arctan(1/2)$.

(b) Vi ser att

$$\begin{aligned} \cosh x = \frac{1}{2} \quad &\Leftrightarrow \quad \frac{e^x + e^{-x}}{2} = \frac{1}{2} \quad \Leftrightarrow \quad e^x + e^{-x} = 1 \quad \Leftrightarrow \quad e^{2x} - e^x + 1 = 0 \\ &\Leftrightarrow \quad \left(e^x - \frac{1}{2}\right)^2 + \frac{3}{4} = 0, \end{aligned}$$

vilket saknar reella lösningar då vänsterledet är $\geq 3/4$.

Svar: (a) $\pi - \arctan(1/2)$ (b) lösning saknas.

6. För att $f(x)$ ska vara definierad måste vi kräva att

$$e^{2x} + 2e^x - 8 \geq 0 \quad \Leftrightarrow \quad (e^x+1)^2 - 9 \geq 0 \quad \Leftrightarrow \quad (e^x+4)(e^x-2) \geq 0 \quad \Leftrightarrow \quad e^x - 2 \geq 0$$

eftersom $e^x + 4 > 0$. Vidare gäller att

$$e^x \geq 2 \quad \Leftrightarrow \quad x \geq \ln 2$$

eftersom exp är strängt växande. Definitionsmängden blir således

$$D_f = \big[\ln 2, \infty\big[.$$

För $x \in D_f$ gäller att

$$\begin{aligned} y = \sqrt{e^{2x} + 2e^x - 8} \quad &\Rightarrow \quad y^2 = e^{2x} + 2e^x - 8 \quad \Leftrightarrow \quad (e^x+1)^2 = y^2 + 9 \\ &\Leftrightarrow \quad e^x = -1 \pm \sqrt{y^2+9} \end{aligned}$$

där endast

$$e^x = -1 + \sqrt{y^2+9} \quad \Leftrightarrow \quad x = \ln\left(-1 + \sqrt{y^2+9}\right)$$

är en lösning eftersom $e^x > 0$ och $-1 - \sqrt{y^2+9} < 0$. Då vi finner högst en lösning för varje y är f injektiv och ett uttryck för inversen ges av

$$f^{-1}(y) = \ln\left(-1 + \sqrt{y^2+9}\right).$$

Svar: $D_f = [\ln 2, \infty[$; $f^{-1}(y) = \ln\left(-1 + \sqrt{y^2+9}\right)$.

7. Låt $z_0 = \alpha + i\beta$, där $\alpha, \beta \in \mathbf{R}$. Eftersom $p(z)$ har reella koefficienter så är även $\overline{z_0} = \alpha - i\beta$ ett nollställe. Vi ser att $p(\pm 2) \neq 0$ så det följer att $\beta \neq 0$ och att $z_0 \neq \overline{z_0}$. Alltså är

$$(z - z_0)(z - \overline{z_0}) = z^2 - z(\alpha + i\beta + \alpha - i\beta) + |z_0|^2 = z^2 - 2\alpha z + 4$$

en faktor i $p(z)$, där vi utnyttjat att $|z_0| = 2$. Då existerar det ett polynom $z^2 + bz + c$ så att

$$p(z) = (z^2 - 2\alpha z + 4)(z^2 + bz + c) = z^4 + (b - 2\alpha)z^3 + (c - 2\alpha b + 4)z^2 + (4b - 2\alpha c)z + 4c,$$

ur vilket det följer att

$$4c = 24, \quad 4b - 2\alpha c = -10, \quad c - 2\alpha b + 4 = 4, \quad \text{och} \quad b - 2\alpha = -1.$$

Så $c = 6$ och $b + 1 = 2\alpha$, vilket visar att

$$4b - 2\alpha c = -10 \quad \Leftrightarrow \quad 4b - 6(b + 1) = -10 \quad \Leftrightarrow \quad b = 2.$$

Därmed är $\alpha = 3/2$. En kontroll visar att dessa värden även uppfyller att $c - 2\alpha b + 4 = 4$. Vi har nu visat att

$$p(z) = (z^2 - 3z + 4)(z^2 + 2z + 6) \tag{$\star$}$$

och

$$\alpha = \frac{3}{2} \quad \Rightarrow \quad \beta^2 = 4 - \alpha^2 = \frac{7}{4},$$

så

$$\frac{3 \pm i\sqrt{7}}{2}$$

är nollställen till den första faktorn i högerledet av ($\star$). Vidare gäller att

$$0 = z^2 + 2z + 6 = (z + 1)^2 + 5 \quad \Leftrightarrow \quad z = -1 \pm i\sqrt{5}.$$

Svar: $\dfrac{3 \pm i\sqrt{7}}{2}$, $-1 \pm i\sqrt{5}$.

Alternativt. Det är även möjligt att bestämma uppdelningen i ($\star$) genom en polynomdivision av $p(z)$ med $z^2 - 2\alpha z + 4$, där α väljs så att resten blir noll.