Lösningsförslag matematisk grundkurs 2025-01-10

1. (a) Summan är aritmetisk med 81 termer. Den första termen är 40 och sista termen är -200, så summan blir

$$\sum_{k=-11}^{69}(7-3k) = \frac{40-200}{2}\cdot 81 = -80\cdot 81 = -6480.$$

(b) Linjens ekvation kan skrivas $y = kx+m$, där $2 = -k+m$ och $-2 = 2k+m$. Genom att lösa detta ekvationssystem finner vi att $k = -4/3$ och $m = 2/3$, så linjens ekvation blir $y = \dfrac{2-4x}{3}$. Cirkelns ekvation ges av $(x-1)^2+(y-1)^2 = 4$. Vid skärningspunkter mellan linje och cirkel måste både linjens och cirkelns respektive ekvation vara uppfyllda, så

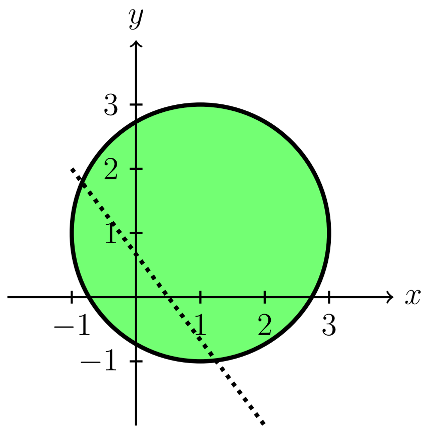
$$\begin{aligned}(x-1)^2+\left(\frac{-1-4x}{3}\right)^2 = 4 \quad &\Leftrightarrow \quad x^2-2x+1+\frac{1+8x+16x^2}{9} = 4\\ &\Leftrightarrow \quad 25x^2-10x-26 = 0 \quad \Leftrightarrow \quad x^2-\frac{2}{5}x-\frac{26}{25} = 0\\ &\Leftrightarrow \quad \left(x-\frac{1}{5}\right)^2 = \frac{27}{25} \quad \Leftrightarrow \quad x = \frac{1\pm 3\sqrt{3}}{5}.\end{aligned}$$

Skärningspunkterna ges därmed av

$$\left(\frac{1+3\sqrt{3}}{5}, \frac{2-4\sqrt{3}}{5}\right)$$

och

$$\left(\frac{1-3\sqrt{3}}{5}, \frac{2+4\sqrt{3}}{5}\right).$$



Svar: (a) -6480 (b) $\left(\frac{1+3\sqrt{3}}{5}, \frac{2-4\sqrt{3}}{5}\right)$ och $\left(\frac{1-3\sqrt{3}}{5}, \frac{2+4\sqrt{3}}{5}\right)$.

2. Ekvationen kan formuleras om enligt

$$8^x - 3\cdot 4^x + 2 = 0 \quad \Leftrightarrow \quad (2^x)^3 - 3\cdot(2^x)^2 + 2 = 0.$$

Vi låter $t = 2^x > 0$ och löser ekvationen

$$t^3 - 3t^2 + 2 = 0$$

genom att först testa fram en rot. Exempelvis $t = 1$ är en lösning. Polynomdivision med $t-1$ (utför den!) visar sedan att

$$t^3 - 3t^2 + 2 = (t-1)(t^2-2t-2).$$

Kvadratkomplettering av den andra faktorn i högerledet visar att

$$t^2 - 2t - 2 = (t-1)^2 - 3 = 0 \quad \Leftrightarrow \quad t = 1 \pm \sqrt{3} \quad \Leftrightarrow \quad t = 1 + \sqrt{3} \text{ eller } t = 1 - \sqrt{3}.$$

Eftersom $t > 0$ så kan inte $t = 1 - \sqrt{3}$ vara en lösning. Däremot är

$$t = 2^x = 1 \quad \Leftrightarrow \quad x = 0$$

och

$$t = 2^x = 1 + \sqrt{3} \quad \Leftrightarrow \quad x = \frac{\ln(1+\sqrt{3})}{\ln 2}$$

lösningar (där vi har ekvivalenser eftersom $x \mapsto 2^x$ är injektiv).

Svar: $x = 0$ eller $x = \dfrac{\ln(1+\sqrt{3})}{\ln 2}$.

3. **Svar**: (a) $\dfrac{3}{\sqrt{13}}$ (b) $x = \dfrac{2\pi}{5} + 2\pi n$, $n \in \mathbf{Z}$, eller $x = -\dfrac{2\pi}{25} + \dfrac{2\pi n}{5}$, $n \in \mathbf{Z}$ (c) $-\dfrac{3\pi}{10}$.

4. (a) För att $f(x)$ ska vara definierad måste vi kräva att

$$7 - 2x > 0 \quad \text{och} \quad 10 - x > 0,$$

så $x < \dfrac{7}{2}$ är nödvändigt. Definitionsmängden blir således

$$D_f = \left]-\infty, \frac{7}{2}\right[.$$

För $x \in D_f$ gäller att

$$\begin{aligned} y = \ln(7-2x) - \ln(10-x) \quad &\Leftrightarrow \quad y = \ln\frac{7-2x}{10-x} \quad \Leftrightarrow \quad e^y = \frac{7-2x}{10-x} \\ &\Leftrightarrow \quad (10-x)e^y = 7 - 2x \\ &\Leftrightarrow \quad x(-2+e^y) = -7 + 10e^y \\ &\Leftrightarrow \quad x = \frac{-7+10e^y}{-2+e^y} = \frac{7-10e^y}{2-e^y}. \end{aligned}$$

Då vi finner högst en lösning för varje y är f injektiv och ett uttryck för inversen ges av

$$f^{-1}(y) = \frac{7-10e^y}{2-e^y}.$$

(b) Vi kvadratkompletterar och finner att

$$0 = z^2 - 4z + 8 = (z-2)^2 + 4 \quad \Leftrightarrow \quad z - 2 = \pm 2i \quad \Leftrightarrow \quad z = 2 \pm 2i.$$

Svar: (a) $D_f = \left]-\infty, \dfrac{7}{2}\right[$; $f^{-1}(y) = \dfrac{7-10e^y}{2-e^y}$ (b) $2 \pm 2i$.

5. Ekvationen kan formuleras om enligt

$$\sin x = 2\sin 3x + \sqrt{3}\cos x \quad \Leftrightarrow \quad \sin x - \sqrt{3}\cos x = 2\sin 3x.$$

Vi använder oss av hjälpvinkelmetoden och skriver om vänsterledet enligt

$$\sin x - \sqrt{3}\cos x = C\sin(x+\psi),$$

med $C > 0$ och $\psi \in \mathbf{R}$. Då ska alltså, enligt additionsformeln för sinus,

$$C\sin(x+\psi) = C\left(\sin x\cos\psi + \cos x\sin\psi\right) = \sin x - \sqrt{3}\cos x.$$

Genom att, till exempel, låta $x = 0$ och $x = \pi/2$, erhåller vi sambanden

$$\begin{cases} C\sin\psi &= -\sqrt{3}, \\ C\cos\psi &= 1. \end{cases}$$

För att bestämma C kvadrerar vi dessa ekvationer och summerar för att finna att

$$C^2 = C^2(\sin^2\psi + \cos^2\psi) = (-\sqrt{3})^2 + 1 = 4.$$

Alltså är $C = 2$ och vi finner ψ genom att lösa

$$\begin{cases} \cos\psi &= \dfrac{1}{2}, \\[2ex] \sin\psi &= \dfrac{-\sqrt{3}}{2} \end{cases} \quad \Leftrightarrow \quad \psi = -\frac{\pi}{3} + 2m\pi,\ m \in \mathbf{Z}.$$

Rita en enhetscirkel för att se detta! Vi väljer $\psi = -\dfrac{\pi}{3}$.

Därmed kan vi säga att

$$\begin{aligned} \sin x - \sqrt{3}\cos x = 2\sin 3x \quad &\Leftrightarrow \quad 2\sin\left(x - \frac{\pi}{3}\right) = 2\sin 3x \\ &\Leftrightarrow \quad \begin{cases} x - \dfrac{\pi}{3} = 3x + 2\pi n,\ n \in \mathbf{Z}, \\ \qquad \text{eller} \\ x - \dfrac{\pi}{3} = \pi - 3x + 2\pi n,\ n \in \mathbf{Z}. \end{cases} \end{aligned}$$

Alltså blir

$$2x = -\frac{\pi}{3} - 2\pi n \quad \Leftrightarrow \quad x = -\frac{\pi}{6} - \pi n$$

eller

$$4x = \frac{4\pi}{3} + 2\pi n \quad \Leftrightarrow \quad x = \frac{\pi}{3} + \frac{\pi n}{2}.$$

I det här läget kan vi faktiskt se att den första lösningsskaran ingår i den andra.

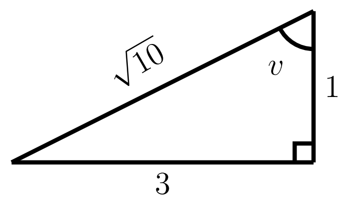
Svar: $x = \dfrac{\pi}{3} + \dfrac{\pi n}{2}$, $n \in \mathbf{Z}$.

6. Låt $\alpha = \beta - \gamma$, där $\beta = \arctan 2$ och $\gamma = \arccos\left(-\frac{1}{\sqrt{10}}\right)$. Då gäller enligt känd additionsformel för tangens att

$$\tan\alpha = \frac{\tan\beta - \tan\gamma}{1 + \tan\beta\tan\gamma} = \frac{2 - \tan\gamma}{1 + 2\tan\gamma}.$$

Eftersom $v = \pi - \arccos\left(\frac{-1}{\sqrt{10}}\right)$ medför att $0 < v < \pi/2$ och $\cos v = 1/\sqrt{10}$, så vi ser direkt ur en hjälptriangel att

$$\tan v = 3$$



och därmed blir

$$\tan\left(\arccos\left(\frac{-1}{\sqrt{10}}\right)\right) = \tan(\pi - v) = -\tan v = -3.$$

Således erhåller vi att

$$\tan\alpha = \tan\left(\arctan 2 - \arccos\left(-\frac{1}{\sqrt{10}}\right)\right) = \frac{2-(-3)}{1+2\cdot(-3)} = -1.$$

Eftersom

$$\tan\alpha = -1 \quad \Leftrightarrow \quad \alpha = -\frac{\pi}{4} + n\pi,\ n \in \mathbf{Z},$$

så måste

$$\alpha = \arctan 2 - \arccos\left(-\frac{1}{\sqrt{10}}\right) = -\frac{\pi}{4} + n\pi$$

för något heltal n. Vi uppskattar storleken på ingående arcusfunktioner:

$$0 < \arctan 2 < \frac{\pi}{2}$$

och

$$\frac{\pi}{2} < \arccos\left(\frac{-1}{\sqrt{10}}\right) < \pi.$$

Alltså gäller

$$-\pi = 0 - \pi < \alpha < \frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{2} = 0$$

så det följer att $n = 0$ är nödvändigt. Sålunda blir

$$\alpha = -\frac{\pi}{4}$$

Svar: $\alpha = -\frac{\pi}{4}$

7. Vi noterar att $\sin t$ är inverterbar på de maximala intervallen (de som har störst längd) som har formen $\left[-\frac{\pi}{2} + \pi n,\ \frac{\pi}{2} + \pi n\right]$ för alla $n \in \mathbf{Z}$. Där är $\sin t$ endera strängt växande eller strängt avtagande. Det går inte att utvidga intervallen och bibehålla injektiviteten.

Vidare är e^x strängt växande för alla x, så sammansättningen $\sin e^x$ är inverterbar om och endast om
$$-\frac{\pi}{2}+\pi n \leq e^x \leq \frac{\pi}{2}+\pi n$$
för något heltal n. Här ser vi att $n<0$ inte ger några möjliga x. Om $n=0$ finner vi att
$$-\frac{\pi}{2} \leq e^x \leq \frac{\pi}{2} \quad \Leftrightarrow \quad x \leq \ln\frac{\pi}{2},$$
så ett möjligt intervall som är en delmängd av $]0,\infty[$ blir $]0,\ln(\pi/2)]$. Om $n>0$ så gäller
$$-\frac{\pi}{2}+\pi n \leq e^x \leq \frac{\pi}{2}+\pi n \quad \Leftrightarrow \quad \ln\Big(-\frac{\pi}{2}+\pi n\Big) \leq x \leq \ln\Big(\frac{\pi}{2}+\pi n\Big).$$
Dessa intervall har längden
$$\ln\Big(\frac{\pi}{2}+\pi n\Big)-\ln\Big(-\frac{\pi}{2}+\pi n\Big)=\ln\left(\frac{\frac{\pi}{2}+\pi n}{-\frac{\pi}{2}+\pi n}\right)=\ln\left(\frac{\frac{\pi}{2n}+\pi}{-\frac{\pi}{2n}+\pi}\right)=\ln\left(\frac{\frac{1}{2n}+1}{-\frac{1}{2n}+1}\right)$$
och där ser vi att nämnaren i bråket är positiv och strängt växande och täljaren är positiv och strängt avtagande. Således är längden av dessa intervall strängt avtagande då n växer. Största intervallet av dessa blir därför när $n=1$ (med längden $\ln 3$). Detta är ett längre intervall än när $n=0$ eftersom $3>\dfrac{\pi}{2}$ så $\ln 3>\ln(\pi/2)$.

Därför måste
$$D_f=\Big[\ln\Big(-\frac{\pi}{2}+\pi\Big),\ \ln\Big(\frac{\pi}{2}+\pi\Big)\Big]=\Big[\ln\Big(\frac{\pi}{2}\Big),\ \ln\Big(\frac{3\pi}{2}\Big)\Big].$$
För $x\in D_f$ gäller att $e^x\in[\pi/2,\ 3\pi/2]$, så $e^x-\pi\in[-\pi/2,\ \pi/2]$. Därför kommer
$$\begin{aligned} y=\sin e^x=-\sin\big(e^x-\pi\big) \quad &\Leftrightarrow \quad \sin\big(e^x-\pi\big)=-y \\ &\Leftrightarrow \quad e^x-\pi=\arcsin(-y)=-\arcsin y \\ &\Leftrightarrow \quad x=\ln(\pi-\arcsin y). \end{aligned}$$
Ett uttryck för inversen ges således av
$$f^{-1}(y)=\ln(\pi-\arcsin y).$$

Svar: $D_f=\Big[\ln\Big(\dfrac{\pi}{2}\Big),\ \ln\Big(\dfrac{3\pi}{2}\Big)\Big]$; $f^{-1}(y)=\ln(\pi-\arcsin y)$.