

Lösningsförslag matematisk grundkurs 2026-01-05

1. (a) Låt oss stuvva om i ekvationen för att sedan kvadrera båda leden (observera att det då bara blir en implikation!):

$$\begin{aligned} x + \sqrt{2x^2 + 4x + 6} = 1 &\Leftrightarrow \sqrt{2x^2 + 4x + 6} = 1 - x \\ &\Rightarrow 2x^2 + 4x + 6 = (1 - x)^2 = 1 - 2x + x^2 \\ &\Leftrightarrow x^2 + 6x + 5 = 0 \\ &\Leftrightarrow (x + 3)^2 = 4 \quad \Leftrightarrow x = -3 \pm 2 \\ &\Leftrightarrow x = -5 \quad \text{eller} \quad x = -1. \end{aligned}$$

Eftersom vi har en implikation **måste** svaren testas. Om $x = -5$ ser vi att

$$\text{VL} = -5 + \sqrt{2(-5)^2 + 4(-5) + 6} = -5 + \sqrt{36} = -5 + 6 = 1 = \text{HL},$$

så $x = -5$ är en lösning. Om $x = -1$ är

$$\text{VL} = -1 + \sqrt{2(-1)^2 + 4(-1) + 6} = -1 + \sqrt{4} = -1 + 2 = 1 = \text{HL}.$$

Eftersom vänsterled och högerled stämmer överens så är även $x = -1$ en lösning.

- (b) Vi stuvar om lite i olikheten och finner att

$$\frac{x+2}{x+1} < \frac{x+1}{x+2} \quad \Leftrightarrow \quad 0 < \frac{(x+1)^2 - (x+2)^2}{(x+1)(x+2)} \quad \Leftrightarrow \quad \frac{2x+3}{(x+1)(x+2)} < 0$$

där vi nu gör ett teckenschema för det funna uttrycket.

	-2	-3/2	-1
$x+2$	- 0 +	+	+
$2x+3$	-	- 0	+
$x+1$	-	-	- 0 +
$\frac{3x+2}{(x+1)(x+2)}$	-  +	0	-  +

Vi ser ur tabellen att uttrycket är negativt precis då $x < -2$ eller $-3/2 < x < -1$.

Svar: (a) $x = -5$ eller $x = -1$ (b) $x < -2$ eller $-3/2 < x < -1$.

2. (a) För att samtliga logaritmer ska vara definierade så måste $x > 0$, $x > 1$, $x > -1$ och $x < 7$, det vill säga $1 < x < 7$. För $1 < x < 7$ så gäller att

$$\begin{aligned} \ln x - \ln(x-1) - \ln 5 &= \ln(x+1) - \ln(7-x) \\ &\Leftrightarrow \ln x + \ln(7-x) = \ln 5 + \ln(x+1) + \ln(x-1) \\ &\Leftrightarrow \ln(x(7-x)) = \ln(5(x+1)(x-1)) \quad \Leftrightarrow \quad 7x - x^2 = 5(x^2 - 1) \\ &\Leftrightarrow \quad 0 = 6x^2 - 7x - 5 = 6 \left(\left(x - \frac{7}{12} \right)^2 - \frac{49}{144} - \frac{5}{6} \right) \\ &\Leftrightarrow \quad \left(x - \frac{7}{12} \right)^2 = \frac{169}{144} \\ &\Leftrightarrow \quad x = \frac{7}{12} \pm \frac{13}{12} \quad \Leftrightarrow \quad x = -1/2 \quad \text{eller} \quad x = 5/3 \end{aligned}$$

eftersom $\ln$ är injektiv. Endast $x = 5/3$ uppfyller ekvationen då $-1/2 \leq 1$.

(b) Ekvationen kan formuleras om enligt

$$\begin{aligned}\frac{e^x + e^{-x}}{2} = 4 \cdot \frac{e^x - e^{-x}}{2} &\Leftrightarrow e^{2x} + 1 = 4(e^{2x} - 1) \Leftrightarrow 3e^{2x} = 5 \Leftrightarrow e^{2x} = \frac{5}{3} \\ &\Leftrightarrow 2x = \ln\left(\frac{5}{3}\right) \Leftrightarrow x = \frac{1}{2} \ln\left(\frac{5}{3}\right)\end{aligned}$$

där vi har näst sista ekvivalensen eftersom $x \mapsto e^{2x}$ är injektiv.

Svar: (a) $x = 5/3$ (b) $x = \frac{1}{2} \ln\left(\frac{5}{3}\right)$.

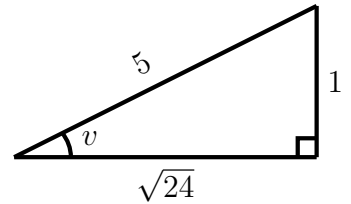
3. (a) Enligt additionsformel för $\cos$, $\cos(u - v) = \cos u \cos v + \sin u \sin v$, så erhåller vi att

$$\begin{aligned}\cos \frac{\pi}{12} &= \cos\left(\frac{\pi}{3} - \frac{\pi}{4}\right) = \cos \frac{\pi}{3} \cos \frac{\pi}{4} + \sin \frac{\pi}{3} \sin \frac{\pi}{4} \\ &= \frac{1}{2} \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2} \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} = \frac{\sqrt{2} + \sqrt{6}}{4}.\end{aligned}$$

(b) Låt $v = \arcsin(1/5)$.

Eftersom det gäller att $0 < v < \pi/2$ och $\sin v = 1/5$, så vi ser direkt ur en hjälptriangel att

$$\tan v = \frac{1}{\sqrt{5^2 - 1^2}} = \frac{1}{\sqrt{24}} = \frac{1}{2\sqrt{6}} = \frac{\sqrt{6}}{12}.$$



(c) Enligt definition är $\arcsin(1/2) = \pi/6 \in [-1, 1]$, så

$$\begin{aligned}\sin x = \arcsin \frac{1}{2} &= \frac{\pi}{6} \\ \Leftrightarrow x &= \arcsin\left(\frac{\pi}{6}\right) + 2n\pi, n \in \mathbf{Z}, \text{ eller } x = \pi - \arcsin\left(\frac{\pi}{6}\right) + 2n\pi, n \in \mathbf{Z}.\end{aligned}$$

Svar: (a) $\frac{\sqrt{2} + \sqrt{6}}{4}$ (b) $\frac{1}{2\sqrt{6}}$

(c) $x = \arcsin\left(\frac{\pi}{6}\right) + 2n\pi, n \in \mathbf{Z}$, eller $x = \pi - \arcsin\left(\frac{\pi}{6}\right) + 2n\pi, n \in \mathbf{Z}$.

4. Tre Euler-omskrivningar visar att

$$\begin{aligned}4 \cos 2x \sin^2 3x &= 4 \left(\frac{e^{i2x} + e^{-i2x}}{2} \right) \left(\frac{e^{i3x} - e^{-i3x}}{2i} \right) \left(\frac{e^{i3x} - e^{-i3x}}{2i} \right) \\ &= -\frac{1}{2} (e^{i5x} - e^{-ix} + e^{ix} - e^{-i5x}) (e^{i3x} - e^{-i3x}) \\ &= -\frac{1}{2} (e^{i8x} - e^{i2x} - e^{i2x} + e^{-i4x} + e^{i4x} - e^{-i2x} - e^{-i2x} + e^{-i8x}) \\ &= -(\cos 8x + \cos 4x - 2 \cos 2x).\end{aligned}$$

Alltså gäller att

$$\begin{aligned}4 \cos 2x \sin^2 3x = \cos 2x - \cos 4x &\Leftrightarrow \cos 8x = \cos 2x \\ &\Leftrightarrow 8x = 2x + 2n\pi \text{ eller } 8x = -2x + 2n\pi,\end{aligned}$$

där $n \in \mathbf{Z}$. Vi finner alltså lösningarna

$$6x = 2n\pi \quad \Leftrightarrow \quad x = \frac{n\pi}{3}$$

eller

$$10x = 2n\pi \quad \Leftrightarrow \quad x = \frac{n\pi}{5}.$$

Svar: $x = \frac{n\pi}{3}, n \in \mathbf{Z}$, eller $x = \frac{n\pi}{5}, n \in \mathbf{Z}$.

5. För att $f(x)$ ska vara definierad måste vi kräva att $t = \frac{x+1}{x-2} \in [-1, 1]$ (för att $\arcsin t$ ska vara definierad). Definitionsmängden ges därför av de x där

$$\frac{x+1}{x-2} \leq 1 \quad \Leftrightarrow \quad \frac{x+1-(x-2)}{x-2} = \frac{3}{x-2} \leq 0 \quad \Leftrightarrow \quad x < 2$$

och

$$\begin{aligned} \frac{x+1}{x-2} \geq -1 &\quad \Leftrightarrow \quad \frac{x+1}{x-2} + 1 \geq 0 \quad \Leftrightarrow \quad \frac{x+1+x-2}{x-2} = \frac{2x-1}{x-2} \geq 0 \\ &\quad \Leftrightarrow \quad x \leq \frac{1}{2} \quad \text{eller} \quad x > 2. \end{aligned}$$

Vi ser enklast det sista fallet genom att göra en ordentlig teckentabell. Tabellen till höger visar att bråket är icke-negativt precis då $x \leq 1/2$ eller $x > 2$.

	1/2	2	
$2x-1$	-	0	+
$x-2$	-	-	0
$\frac{2x-1}{x-2}$	+	0	-
			☠
			+

Så $D_f =]-\infty, 1/2] \cup]2, \infty[$ och för $x \in D_f$ gäller att

$$\begin{aligned} y = \arcsin\left(\frac{x+1}{x-2}\right) &\Rightarrow \sin y = \frac{x+1}{x-2} \quad \Leftrightarrow \quad (x-2)\sin y = x+1 \\ &\Leftrightarrow \quad x(-1 + \sin y) = 1 + 2\sin y \quad \Leftrightarrow \quad x = \frac{1 + 2\sin y}{-1 + \sin y}. \end{aligned}$$

Eftersom vi finner högst en lösning för varje y är f injektiv och ett uttryck för inversen ges av

$$f^{-1}(y) = \frac{1 + 2\sin y}{-1 + \sin y}.$$

Notera implikationen ovan. Vill vi skriva ekvivalens behövs villkor på y .

Svar: $D_f =]-\infty, 1/2] \cup]2, \infty[; f^{-1}(y) = \frac{1 + 2\sin y}{-1 + \sin y}.$

6. Vi formulerar om ekvationen enligt

$$(2+2i)z^5 + \sqrt{3} = 3i \quad \Leftrightarrow \quad z^5 = \frac{3i - \sqrt{3}}{2+2i}.$$

Eftersom $|3i - \sqrt{3}| = \sqrt{(-\sqrt{3})^2 + 3^2} = \sqrt{12} = 2\sqrt{3}$ och $|2+2i| = \sqrt{2^2 + 2^2} = \sqrt{8} = 2\sqrt{2}$ så ser vi att

$$\frac{3i - \sqrt{3}}{2+2i} = \frac{2\sqrt{3}}{2\sqrt{2}} \frac{e^{i2\pi/3}}{e^{i\pi/4}} = \sqrt{\frac{3}{2}} e^{i5\pi/12},$$

där vi enklast ser omskrivningarna till polär form genom att rita en enhetscirkel (rita en ordentlig figur!). Ekvationen i uppgiften kan således skrivas

$$z^5 = \sqrt{\frac{3}{2}} e^{i5\pi/12}.$$

Låt nu $z = re^{i\varphi}$, där $r \geq 0$ och $\varphi \in \mathbf{R}$. Då måste

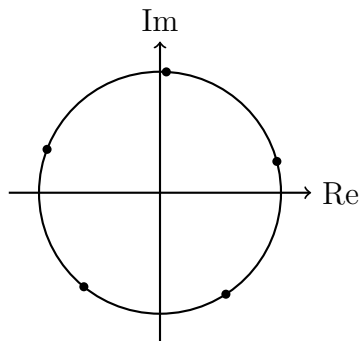
$$z^5 = r^5 e^{i5\varphi} = \sqrt{\frac{3}{2}} e^{i5\pi/12} \Leftrightarrow \begin{cases} r^5 = \sqrt{3/2}, & r \geq 0, \\ 5\varphi = \frac{5\pi}{12} + 2\pi n, & n \in \mathbf{Z}. \end{cases} \quad (1)$$

Detta visar att $r = (\sqrt{3/2})^{1/5} = (3/2)^{1/10}$ och $\varphi = \frac{\pi}{12} + \frac{2n\pi}{5}$, $n \in \mathbf{Z}$.

Våra lösningar blir nu

$$z = \left(\frac{3}{2}\right)^{1/10} e^{i(\frac{\pi}{12} + \frac{2n\pi}{5})}, \quad n = 0, 1, 2, 3, 4.$$

Här har vi valt att endast numrera de lösningar som är unika (när $n = 5$ får vi samma lösning som när $n = 0$ etc). Observera dock att för ekvivalensen i ekvation (1) **måste** vi ha $n \in \mathbf{Z}$ godtycklig.



Svar: $z = \left(\frac{3}{2}\right)^{1/10} e^{i(\frac{\pi}{12} + \frac{2n\pi}{5})}, \quad n = 0, 1, 2, 3, 4.$

7. Eftersom $\ln x < x - 1$ för alla $x > 0$ och $x \neq 1$ så följer det att

$$\begin{aligned} \pi^e &= \exp(e \ln \pi) = \exp\left(e \ln\left(\frac{\pi}{e} \cdot e\right)\right) = \exp\left(e\left(\ln\left(\frac{\pi}{e}\right) + \ln e\right)\right) \\ &= \exp\left(e \ln\left(\frac{\pi}{e}\right) + e\right) < \exp\left(e\left(\frac{\pi}{e} - 1\right) + e\right) = \exp\left(e\frac{\pi}{e} - e + e\right) = e^\pi \end{aligned}$$

eftersom $\exp$ är strängt växande.

Svar: $\pi^e < e^\pi$.